

# Gravitationswirkung der kosmologischen Expansion

Manfred Ellerich, Berlin

**Veröffentlicht:** August 8, 2021

**Schlüsselwörter:** Gravitation, Hubble-Konstante, kosmologische Expansion, Friedmann-Gleichungen

**Keywords:** Gravitation, Hubble Constant, cosmological expansion, Friedmann Equations



## REPORTS OF SCIENCE

[moringa.pub/ojs/index.php/reports](http://moringa.pub/ojs/index.php/reports)

ISSN 2567-3394



Soweit nicht anders angegeben, ist dieses Werk lizenziert unter der Creative Commons Namensnennung - Nicht kommerziell -

Keine Bearbeitungen 4.0 International Lizenz:

[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

**Zusammenfassung:** Unter der Annahme einer mit der Zeit veränderlichen Gravitationswirkung, die sich über die Entwicklung der Dichte des Universums formal beschreiben lässt, wird gestützt durch die Ergebnisse A. Friedmanns auf Grundlage von Newtonschen Gravitationsfeldern ein Modell der kosmologischen Expansion entwickelt, das Erklärungen für einige der grundlegenden Probleme in der heutigen Kosmologie ermöglicht. Insbesondere ergibt sich für dieses Modell ohne Berücksichtigung der dunklen Materie und der dunklen Energie zum Weltalter des Standardmodells eine signifikante Übereinstimmung mit dem von W. Freedman im Jahr 2019 bestimmten Wert  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$ .

Aus der abnehmenden Gravitationswirkung, die sich aus diesem Modell mit zunehmender Entfernung der Standardkerzen ergibt, werden Auswirkungen auf die Entfernungsbestimmung gefolgert, deren formale Abschätzung für die abnehmende Leuchtkraft der Supernovae und Galaxien auf den größeren Entfernungen zu signifikanten Abweichungen führt, wodurch insbesondere die abweichenden Messungen der Hubble-Konstanten erklärbar werden.

Konkret werden diese Abschätzungen für die abweichenden Entfernungen auf die scheinbar zu diesem Modell im Widerspruch stehenden Messungen der beschleunigten Expansion durch S. Perlmutter aus dem Jahr 1998 und des BAO Peaks durch L. Anderson aus dem Jahr 2013 angewendet, wodurch sich alternative Interpretationen für diese Messungen ergeben.

**Abstract:** Assuming a gravitational effect that varies with time, which can be formally described by the evolution of the density of the universe, supported by the results of A. Friedmann based on Newtonian gravitational fields, a model of cosmological expansion is developed that allows explanations for some of the fundamental problems in cosmology today. In particular for this model without taking into account dark matter and dark energy to the universe's age of the Standard Model, there is significant agreement with the value  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$  determined by W. Freedman in 2019.

From the decreasing gravitational effect, which results from this model with increasing distance of the standard candles, implications for distance determination are inferred, whose formal estimation for the decreasing luminosity of supernovae and galaxies at the larger distances leads to deviations, which in particular explains the deviating measurements for the Hubble Constant. Specifically, these estimates for the deviating distances are applied to the seemingly contradictory measurements of the accelerated expansion of the universe by S. Perlmutter from 1998 and of the BAO Peak by L. Anderson from 2013, resulting in alternative interpretations for these measurements.

# Gravitationswirkung der kosmologischen Expansion

Manfred Ellerich

7. August 2021, Berlin

## *Zusammenfassung:*

Unter der Annahme einer mit der Zeit veränderlichen Gravitationswirkung, die sich über die Entwicklung der Dichte des Universums formal beschreiben lässt, wird gestützt durch die Ergebnisse A. Friedmanns auf Grundlage von Newtonschen Gravitationsfeldern ein Modell der kosmologischen Expansion entwickelt, das Erklärungen für einige der grundlegenden Probleme in der heutigen Kosmologie ermöglicht. Insbesondere ergibt sich für dieses Modell ohne Berücksichtigung der dunklen Materie und der dunklen Energie zum Weltalter des Standardmodells eine signifikante Übereinstimmung mit dem von W. Freedman im Jahr 2019 bestimmten Wert  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$ . Aus der abnehmenden Gravitationswirkung, die sich aus diesem Modell mit zunehmender Entfernung der Standardkerzen ergibt, werden Auswirkungen auf die Entfernungsbestimmung gefolgert, deren formale Abschätzung für die abnehmende Leuchtkraft der Supernovae und Galaxien auf den größeren Entfernungen zu signifikanten Abweichungen führt, wodurch insbesondere die abweichenden Messungen der Hubble-Konstanten erklärbar werden. Konkret werden diese Abschätzungen für die abweichenden Entfernungen auf die scheinbar zu diesem Modell im Widerspruch stehenden Messungen der beschleunigten Expansion durch S. Perlmutter aus dem Jahr 1998 und des BAO Peaks durch L. Anderson aus dem Jahr 2013 angewendet, wodurch sich alternative Interpretationen für diese Messungen ergeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Die Expansionsdynamik nach Friedmann</b>	<b>5</b>
1.1 Friedmann-Gleichungen . . . . .	6
1.2 Die verschiedenen Expansionsphasen . . . . .	11
1.3 Expansion nach dem Standardmodell . . . . .	14
<b>2 Die dichteunabhängige Expansionsdynamik</b>	<b>16</b>
2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	17
2.2 Beschreibung des Skalenfaktors . . . . .	20
2.3 Erweiterung des Einstein-de-Sitter Modells . . . . .	22
2.4 Dauer der Strahlungs-Ära . . . . .	25
2.5 Bestimmung der Hubble-Konstanten . . . . .	27
<b>3 Konsequenzen für die Entfernungsbestimmung</b>	<b>30</b>
3.1 Die scheinbar beschleunigte Expansion . . . . .	34
3.2 Abschätzung der spezifischen Abweichungen . . . . .	38
3.3 Entfernung der Hintergrundstrahlung . . . . .	43
3.4 Anwendung auf die Messung des BAO Peak . . . . .	48
<b>Fazit</b>	<b>52</b>
<b>Anhang</b>	<b>55</b>

## Einleitung

Die Gravitation, die uns im täglichen Leben als Schwerkraft begegnet, ist zwar die schwächste Fundamentalkraft in der Physik, aber dennoch wegen ihrer unbegrenzten Reichweite allein für die Bildung der großen Strukturen im Universum verantwortlich.

Die ersten empirischen Gesetze zur Gravitationswirkung wurden Anfang des 17. Jahrhunderts von Johannes Kepler entdeckt, auf die ihn die präzisen Beschreibungen der Planetenbahnen von Tycho Brahe zusammen mit dem heliozentrischen Weltbild des Nikolaus Kopernikus geführt haben. Erst rund ein halbes Jahrhundert später gelang es Isaac Newton im Jahr 1687 in seiner fundamentalen Arbeit *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* die Gravitation als Anziehungskraft zwischen zwei beliebigen Massen mithilfe der Gravitationskonstanten  $G$  formal zu beschreiben, wobei er aber keine Erklärung für deren physikalische Natur geben konnte. Dies gelang erst im Jahre 1915 Albert Einstein, der für die Gravitation basierend auf der in seiner *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) postulierten Eigenschaft der Materie die Raum-Zeit zu krümmen eine physikalische Erklärung über die Geometrie gibt, ohne dabei die Bedeutung der Gravitationskonstanten  $G$  für die zwischen den Massen wirkenden Gravitationskraft zu verändern.

Obwohl die durch  $G$  beschriebene Gravitationskraft für astronomisch kurze Entfernungen innerhalb unseres Sonnensystems höchst präzise Vorhersagen erlaubt, zeigen sich schon für innergalaktische Entfernungen Abweichungen bei den Rotationsgeschwindigkeiten der Galaxien, für deren Erklärung die Existenz einer bisher unbekanntes dunklen Materie vermutet wird, deren Masse die der bekannten (sichtbaren) Materie um ein Vielfaches übersteigt. Zur Erklärung der kosmologischen Expansion reicht die dunkle Materie aber nicht aus, weshalb, um den Beobachtungen entsprechend ein ungekrümmtes Universum zu beschreiben, zusätzlich die Existenz einer dunklen Energie benötigt wird, deren Anteil an der Gesamtenergiedichte des Universums nun wiederum ein Vielfaches der Gesamtmasse beider Materiearten beträgt.

Diese zu mehr als 95% auf einer unbekanntes Physik basierende Erklärung für die kosmologische Expansion wurde in den letzten Jahrzehnten nicht als unbefriedigend angesehen, da sie sich weitestgehend mit den Beobachtungen in Übereinstimmung befand, von denen der »Nachweis« der beschleunigten Expansion im Jahr 1998 sicherlich die Bedeutendste war. Dabei wurde den abweichenden Messungen für die wohl wichtigste Größe der kosmologischen Expansion - die Hubble-Konstante - zunächst keine allzu große Bedeutung beigemessen, da sich diese anfänglich auf Messfehler zurückführen ließen. Mit Verbesserung der Messverfahren wird diese Erklärung aber zunehmend unwahrscheinlicher, weshalb die Euphorie der vergangenen Jahrzehnte mehr und mehr der Ernüchterung weicht, dass etwas grundlegendes an unserer Vorstellung vom Universum nicht stimmen kann.

In dieser Arbeit wird von der naheliegenden Annahme ausgegangen, dass die spekulativen Konzepte der dunklen Materie und der dunklen Energie als Konsequenz eines unvollständigen Verständnisses vom Universum uns den Blick auf die eigentlichen Zusammenhänge versperren. Wie wir im ersten Kapitel erläutern werden besteht der wesentliche Aspekt dieser Konzepte für die kosmologische Expansion darin, trotz der durch  $G$  beschriebenen zeitlich konstanten Gravitationswirkung den Beobachtungen entsprechend ein in der Raum-Zeit ungekrümmtes Universum erklären zu können.

Aus diesem Grund verfolgen wir im zweiten Kapitel einen Erklärungsansatz, der nur eine räumlich konstante Gravitationswirkung postuliert, wobei die zeitliche Veränderung auf einem ganzheitlichen Zusammenhang zwischen Raum und Materie beruht, der den bisherigen analytischen Betrachtungen verborgen bleiben musste. In Anlehnung an A. Friedmann wird mithilfe von Gravitationsfeldern, deren zeitlich veränderliche Gravitationswirkung durch eine räumliche Gravitationskonstante  $\tilde{G}$  über die Entwicklung der Dichte im Universum formal beschrieben werden kann, das Modell einer gebremsten Expansion ohne dunkle Energie entwickelt, das unabhängige von der Dichte immer eine ungekrümmte Raum-Zeit erklärt. Für dieses Expansionsmodell ergibt sich schließlich ohne Berücksichtigung der dunklen Materie zu dem Weltalter des Standardmodells eine signifikante Übereinstimmung mit dem von W. Freedman im Jahr 2019 bestimmten Wert für die Hubble-Konstante  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$ .

Die anderen abweichenden Messungen der Hubble-Konstanten lassen sich auf Abweichungen bei der Entfernungsbestimmung zurückführen, die im dritten Kapitel für einige Messverfahren aus der geringeren Gravitation  $\tilde{G}$  in der Vergangenheit des Universums gefolgert werden, wofür zunächst die benötigten Grundlagen und Begriffe zur Beschreibung von Entfernungen in einem expandierenden Raum vorgestellt werden. Eine formale Abschätzung für die über  $\tilde{G}$  beschriebene Reduktion der Leuchtkraft der Supernovae und Galaxien zeigt, dass erst in den ganz großen Entfernungen mit messbaren Abweichungen bei der Entfernungsbestimmung zu rechnen ist, woraus sich Kriterien zur Falsifizierbarkeit des Modells ergeben. Eine Anwendung dieser Abschätzung auf die Messung zum Nachweis der beschleunigten Expansion des Universum zeigt, dass sich diese alternativ auch durch die gebremste Expansion dieses Modells erklären ließe. Zum Abschluss werden die sich theoretisch ergebenden Abweichungen bei der Entfernungsbestimmung der Galaxien auf die Messdaten des BAO Peaks angewendet, woraus sich ebenfalls eine alternative Interpretation für diese Messung ergibt.

Diese Arbeit setzt lediglich Basiswissen der Physik sowie der Differential- und Integralrechnung aber keine Kenntnisse der Kosmologie voraus, weshalb im ersten Kapitel zunächst die benötigten Grundlagen für die Beschreibung der kosmologischen Expansion vorgestellt werden. Die in den Berechnungen zugrunde gelegten Werte der verwendeten physikalischen Größen sind, soweit nicht im Text genannt, im Anhang zu finden.

# 1 Die Expansionsdynamik nach Friedmann

Erstmals formulierte der Astrophysiker und Priester Georges Lemaître die Idee eines mit dem Urknall beginnenden expandierenden Universums, deren Veröffentlichung im Jahr 1927 aber wenig Beachtung fand.

Erst zwei Jahre später 1929 veröffentlichte Edwin Hubble seine berühmte Arbeit, für die er aber auf eine wesentlich größere Datenmenge als Lemaître zurückgreifen konnte. Diese Daten zeigten, dass das Farbspektrum des Lichts der beobachteten Galaxien in den roten Bereich verschoben war, was dem Dopplereffekt zufolge bedeutet, dass sie sich von uns weg bewegen müssen. Dabei steht die Entfernung  $r$  einer Galaxie in einem festen Verhältnis zu der aus ihrer Rotverschiebung bestimmten sogenannten Fluchtgeschwindigkeit  $v$ , was sich nur durch eine Ausdehnung des Raumes selbst erklären lässt.

Obwohl Edwin Hubble diese Erklärung für das beobachtete Phänomen in seiner Arbeit zunächst nicht vertreten hat, wird die Expansionsrate

$$H_0 = \frac{v}{r} \quad (1.0.1)$$

heute ihm zu Ehren als Hubble-Konstante bezeichnet.

Dabei ist der Begriff »Konstante« insofern etwas irreführend, als dass die Expansionsrate der Raumausdehnung nur räumlich konstant ist. Für die von Hubble betrachteten Entfernungen von maximal  $2 \text{ Mpc}$  spielt die zeitliche Abhängigkeit der Expansionsrate zwar keine Rolle; für eine genauere Bestimmung der Hubble-Konstanten sind aber Beobachtungen über größere Entfernungen erforderlich, in denen der Anteil der zufälligen Eigenbewegung der Galaxien im Verhältnis zu ihrer expansiven Bewegung im sogenannten *Hubble Flow* vernachlässigt werden kann. In diesen Entfernungen hängen aber die Rotverschiebungen über einen relativistischen Effekt der Raumausdehnung, auf den wir erst im Kapitel 3 näher eingehen werden, von der zeitlichen Entwicklung der Expansionsrate ab.

Die Raumausdehnung wird über den sogenannten Skalenfaktor  $a(t)$  erklärt, der die Entwicklung des Abstandes  $r(t) = a(t)r_0$  für zwei mit dem Raum auseinander bewegter Punkte zur Bezugslänge  $r_0$  in der kosmologischen Zeit  $t$  beschreibt. Entsprechend 1.0.1 erhalten wir mithilfe des Skalenfaktors für die zeitlich abhängige Expansionsrate die Darstellung

$$H(t) = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} = \frac{\dot{a}(t)r_0}{a(t)r_0} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

die auch als Hubble-Funktion bezeichnet wird und die Einheit  $1/s$  besitzt, wobei in der Astronomie die Einheit  $km/sMpc$  verwendet wird. Bezeichne  $t_0$  den heutigen Zeitpunkt, dann ist  $H_0 = H(t_0)$ . Üblicherweise wird dabei  $a(t_0) = 1$  gesetzt, so dass man für  $r = r_0$  und  $v = \dot{r}(t_0)$  1.0.1 erhält.

Die kosmologische Expansion ist also vollständig durch den Skalenfaktor  $a(t)$  beschrieben, der sich wiederum aus den im Folgenden vorgestellten Friedmann-Gleichungen ergibt.

## 1.1 Friedmann-Gleichungen

Schon 1922, also einige Jahre vor Georges Lemaître und Edwin Hubble, veröffentlichte der Physiker und Mathematiker Alexander Friedmann seine Arbeit *Über die Krümmung des Raumes*, in der er seine Vorstellung nicht-statischer Universen beschrieb. Auf diese hatten ihn die Feldgleichungen geführt, die Albert Einstein nur wenige Jahre zuvor 1915 im Rahmen der ART beschrieben hatte. Allerdings wurde Friedmanns Arbeit zunächst kaum Beachtung geschenkt, da sie der damaligen Vorstellung vom Universum so stark widersprach, dass auch Einstein sie anfangs ablehnte <sup>1</sup> und seinen Gleichungen sogar »künstlich« die kosmologische Konstante hinzufügte, nur um ein statisches Universum erklären zu können. Erst mit der Beobachtung der Galaxienflucht wurde Friedmanns Arbeit von Lemaître wiederentdeckt. Die moderne Fassung der nach ihm benannten Differentialgleichungen mit der kosmologischen Konstanten zur Beschreibung der dunklen Energie sind heute in der Kosmologie von fundamentaler Bedeutung:

### *Friedmann-Gleichungen*

$$\begin{aligned} 1. \quad H(t)^2 &= \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{kc^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ 2. \quad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

wobei  $\rho$  die Dichte,  $p$  den Druck,  $k$  den sogenannten Krümmungsparameter,  $\Lambda$  die kosmologische Konstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Wie bereits erwähnt, wurde dabei der  $\Lambda$ -Term ursprünglich von Einstein in die Gleichungen eingeführt, um ein statisches Universum beschreiben zu können <sup>2</sup>. Heute wird der  $\Lambda$ -Term als Wirkung der dunklen Energie interpretiert, auf die wir gleich im Anschluss näher eingehen werden.

Die Friedmann-Gleichungen vereinfachen die Einsteinschen Feldgleichungen unter der Bedingung des kosmologischen Prinzips, das besagt, dass sich das Universum unabhängig vom Ort und der Richtung einer Beobachtung stets gleich darstellt. Da diese Bedingung auf hinreichend großen Skalenbereichen für das Universum als gegeben angenommen wird, muss die kosmologische Expansion folglich durch die Friedmann-Gleichungen beschrieben werden, die wir im folgenden mit FG abkürzen werden.

Bevor wir in den nächsten Abschnitten dieses Kapitels die FG'en konkret auf die beobachtete Expansion des Universums anwenden, wollen wir zunächst deren physikalische Bedeutung erläutern.

---

<sup>1</sup>Er korrigierte sich später und bezeichnete Friedmanns Arbeit als *belehrend*.

<sup>2</sup>Denn aus  $\dot{a} = 0$  folgt  $\ddot{a} = 0$ , weswegen die 2. Friedmann-Gleichung ohne diesen Term keine Lösung besäße.



Bezeichne  $\rho_0 = \rho(t_0)$  die Materiedichte des Universums zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$ . Ohne Berücksichtigung der Strahlung, die als relativistische Materie Bestandteil der Dichte  $\rho$  ist, erhalten wir mithilfe des Skalenfaktors und der Festlegung  $a(t_0) = 1$  die Darstellung  $\rho(t) = \rho_0/a(t)^3$ . Setzen wir dies in die 1. FG ohne die dunkle Energie ein ( $\Lambda = 0$ ), dann erhalten wir

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{1}{a(t)} = -kc^2 .$$

Denken wir uns nun eine mit der Expansion bewegte Kugel, deren Radius  $r(t) = a(t)r_0$  mit der Ausdehnung des Raumes zunimmt, dann erhalten wir für ein auf der Kugelschale befindliches Teilchen die Bewegungsgleichung

$$\frac{\dot{r}(t)^2}{r_0^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{r_0}{r(t)} = -kc^2 .$$

Nach dem Newtonschen Schalentheorem bzw. dem relativistischen Pendant dem Birkhoff-Theorem, ist die auf ein Teilchen wirkende Gravitationskraft unabhängig davon, ob die Kraft ausübende Masse kugelsymmetrisch verteilt oder im Zentrum konzentriert ist.

Multiplizieren wir die obige Gleichung formal mit  $r_0^2$  und nehmen o.B.d.A  $r_0 = 1$  an, dann erhalten wir deswegen, wie in der Abbildung 1.1 skizziert, die aus der Newtonschen Mechanik bekannte Bewegungsgleichung eines Teilchens in dem durch die Masse  $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0$  induzierten Gravitationsfeld

$$\frac{1}{2}\dot{r}(t)^2 - \frac{GM}{r(t)} = -\frac{kc^2}{2} . \quad (1.1.2)$$

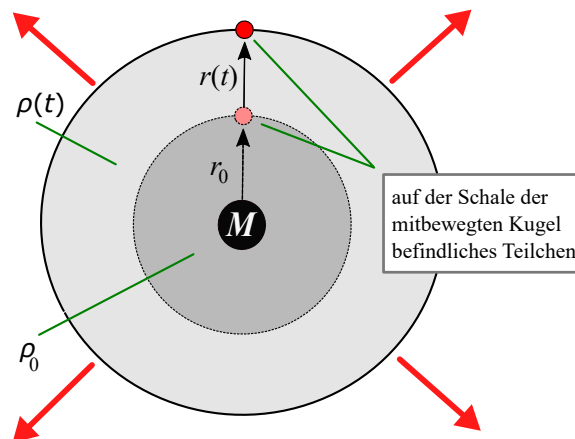


Abbildung 1.1: Beschreibung der kosmologischen Expansion über ein Newtonsches Gravitationsfeld

Entsprechend gilt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz für das auf der Kugelschale befindliche Teilchen

$$\ddot{r}(t) = -\frac{GM}{r(t)^2} = -G \frac{4\pi r_0^3 \rho_0}{3 r(t)^2} .$$

Teilen wir nun diese Gleichung durch  $r(t)$ , dann erhalten wir aufgrund der Identität  $\rho(t) = \rho_0/a(t)^3$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} = -G \frac{4\pi}{3} \frac{r_0^3 \rho_0}{(a(t)r_0)^3} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t) . \quad (1.1.3)$$

Dies entspricht der 2. FG ohne den Druck  $p$  der Strahlung, auf die wir gleich im Anschluss zurückkommen werden, und die dunkle Energie  $\Lambda$ , weshalb die 2. FG auch als Beschleunigungsgleichung bezeichnet wird.

Die FG'en beschreiben also ohne die Berücksichtigung der relativistischen Materie und der dunklen Energie die kosmologische Expansion analog zur Newtonschen Mechanik durch ein mit der Ausdehnung des Raumes bewegtes zeitlich konstantes Gravitationsfeld. Entsprechend resultieren gemäß 1.1.2 aus dem Vorzeichen für die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie  $-kc^2/2$  die folgenden Verläufe für die Expansion:

- Für  $k > 0$  ist die Expansion endlich und kommt zum Stillstand, wenn die kinetische Energie vollständig in potentielle Energie umgewandelt wurde. Dabei beschreibt  $-kc^2/2 < 0$  die fehlende kinetische Energie, die für eine unendliche Expansion mindestens erforderlich wäre.
- Für  $k < 0$  ist die Expansion unendlich, wobei deren kinetische Energie nie unter  $-kc^2/2 > 0$  fällt.
- Für  $k = 0$  wird der Grenzfall einer unendlichen Expansion beschrieben, bei der die kinetische immer genau der potentiellen Energie entspricht, so dass die Geschwindigkeit der Expansion gegen Null konvergiert, aber niemals zum Stillstand kommt. Entsprechend spezifiziert dieses Gleichgewicht über die 1. FG und die heutige Expansionsrate  $H_0$  die sogenannte kritische Dichte

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} . \quad (1.1.4)$$

Mit Ergänzung der dunklen Energie  $\Lambda > 0$  in den FG'en verlassen wir die Analogie zur Newtonschen Mechanik. Dabei werden die potentielle und die dunkle Energie auf der Rechten Seite der 1. FG begrifflich zur Energiedichte zusammengefasst. Auf diese Weise beschreibt der Parameter  $k$  die Differenz zwischen der kinetischen Energie und der Energiedichte des Universums.

Der Robertson-Walker Metrik zufolge führt aber eine Expansion mit einer unausgeglichener Energiebilanz zwischen der Energiedichte des Universums und der kinetischen Energie zu einer Krümmung der Raum-Zeit, weshalb  $k$  auch als Krümmungsparameter bezeichnet wird [4].

- Ist die Energiedichte des Universums größer als die kinetische Energie der Expansion ( $k > 0$ ), dann resultiert ein endliches Universum, dessen Geometrie der 2-dimensionalen gekrümmten Oberfläche einer Kugel entspricht.
- Ist die Energiedichte des Universums kleiner als die kinetische Energie der Expansion ( $k < 0$ ) führt dies auf ein Universum, dessen Raum-Zeit hyperbolisch gekrümmt ist, was einer 2-dimensionalen Sattelfläche entspricht.
- Nur bei einer ausgeglichenen Bilanz zwischen der Energiedichte und der kinetischen Expansionsenergie ( $k = 0$ ), erhalten wir entsprechend den Beobachtungen ein ungekrümmtes (flaches) Universum.

Dieser Zusammenhang ist bereits von Friedmann erkannt worden, und war der Hauptgrund für die Annahme, dass eine dunkle Energie existieren muss, bevor diese im Jahr 1998 durch Saul Perlmutter »nachgewiesen« werden konnte, worauf wir im Abschnitt 3.1 zurückkommen werden.

Die weitere Abweichung der FG'en zur Newtonschen Mechanik ergibt sich bei Berücksichtigung der relativistischen Materie bzw. der gravitativen Wirkung ihres Strahlungsdrucks. Um die physikalischen Zusammenhänge dabei zu verstehen, setzen wir die 2. FG in die folgende Ableitung ein

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= 2\dot{a}\ddot{a} \frac{1}{a^2} - 2\dot{a}^2 \frac{1}{a^3} \dot{a} = 2 \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) \\ &= 2 \frac{\dot{a}}{a} \left( -\frac{12\pi G}{3} \rho - \frac{4\pi G}{3} \frac{3p}{c^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2kc^2 \frac{\dot{a}}{a^3} . \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Ableitungen erhalten wir nach leichter Umformung für die Ableitung der Dichte  $\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right)$ . Daraus gewinnt man dann den physikalischen Zusammenhang für den Strahlungsdruck  $p$

$$\frac{d}{dt} \rho a^3 c^2 = \dot{\rho} a^3 c^2 + \rho 3a^2 \dot{a} c^2 = -3a^2 \dot{a} p = -p \frac{d}{dt} a^3 , \quad (1.1.5)$$

wenn man für das Volumen  $V = a^3$  und die Energie  $U = \rho a^3 c^2 = mc^2$  setzt, woraus sich schließlich das aus der klassischen Thermodynamik bekannte Gesetz  $dU + p \cdot dV = 0$  ergibt.

Hierbei wird der Strahlungsdruck  $p$  ausschließlich durch die relativistische Materie verursacht, deren Dichte sich anders als für die sogenannte kalte Materie proportional zu  $1/a^4$  entwickelt, da bei der Strahlung zusätzlich zur Volumenänderung noch die Streckung der Wellenlängen zu berücksichtigen ist. Deswegen erhalten wir durch Zerlegung der Dichte  $\rho$  in die jeweiligen Anteile der kalten Materie  $\rho_{mat}$  und der Strahlung  $\rho_{rad}$  für die zeitliche Entwicklung der Dichte die formale Darstellung

$$\rho(t) = \rho_{mat}(t) + \rho_{rad}(t) = \frac{C_{mat}}{a(t)^3} + \frac{C_{rad}}{a(t)^4} , \quad (1.1.6)$$

wobei  $C_{mat}, C_{rad} > 0$  geeignete Konstanten bezeichnen. Wegen bestimmter relativistischer Eigenschaften der Strahlung, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, gilt dabei der Zusammenhang

$$p = c^2 \rho_{rad} / 3 . \quad (1.1.7)$$

Damit und unter Berücksichtigung der speziellen Abhängigkeiten 1.1.6 der Dichten vom Skalenfaktor  $a(t)$  bestätigt man die Zerlegung  $\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}$  durch Einsetzen in 1.1.5<sup>3</sup> und erhält schließlich aus der 2. FG die Darstellung

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho(t) + \rho_{rad}(t) \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} . \quad (1.1.8)$$

Die Strahlung wirkt also 2-fach gravitativ. Aufgrund ihres Masseanteils in  $\rho$  und über den  $\rho_{rad}$  entsprechenden Strahlungsdruck. Die kalte Materie hingegen ist drucklos, da sich deren Teilchen im Wesentlichen kollisionsfrei mit nicht-relativistischen Geschwindigkeiten bewegen.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass diese relativistische Gravitationswirkung der Strahlung nur zu Beginn während einer kurzen Phase für die kosmologische Expansion von Bedeutung ist. Nach dieser kurzen Phase kann die Strahlung deshalb vernachlässigt werden, so dass sich das Weltalter für die kosmologische Expansion ohne die dunkle Energie in ausreichender Genauigkeit aus der Newtonschen Mechanik ergibt, was im 2. Kapitel von Bedeutung werden wird (siehe auch [1] - Newtonscher Grenzfall).

---

<sup>3</sup>siehe Anhang

## 1.2 Die verschiedenen Expansionsphasen

Wegen der eben geschilderten gravitativen Wirkung des Strahlungsdrucks besitzt die Expansion mindestens zwei Phasen. Setzen wir die Zerlegung 1.1.6 in die 1. FG für  $k = 0$  ein, um eine krümmungsfreie Expansion zu beschreiben, dann erhalten wir die Darstellung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} C_{rad} \frac{1}{a^4} + \frac{8\pi G}{3} C_{mat} \frac{1}{a^3} + \frac{\Lambda c^2}{3} . \quad (1.2.1)$$

Die verschiedenen Phasen der kosmologischen Expansion werden durch die drei Summanden auf der rechten Seite der Gleichung charakterisiert, deren Beiträge wegen ihrer unterschiedlichen Abhängigkeiten vom Skalenfaktor  $a$  die Gesamtsumme zu der Zeit der jeweiligen Phase dominieren. Deshalb lassen sich die verschiedenen Expansionsphasen näherungsweise durch die folgenden Differentialgleichungen bzw. deren Lösungen beschreiben

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\sim \frac{1}{a^4} \Rightarrow \dot{a} \sim \frac{1}{a} \Rightarrow a(t) \sim \sqrt{t} , \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \dot{a}^2 \sim \frac{1}{a} \Rightarrow a(t) \sim t^{2/3} , \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\sim 1 \Rightarrow \dot{a} \sim a \Rightarrow a(t) \sim \exp(t) . \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

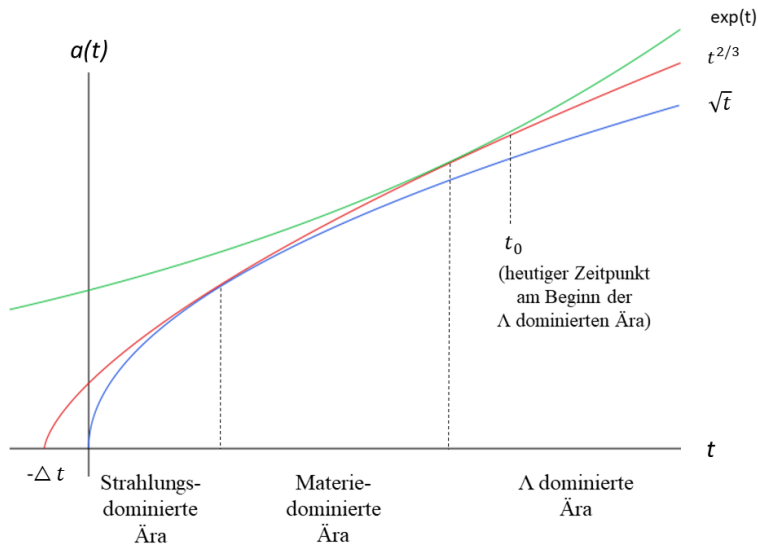


Abbildung 1.2: Skizzierung der verschiedenen Expansionsphasen

Wie in der Abbildung 1.2 skizziert, können die Lösungen für die separaten Differentialgleichungen 1.2.2 durch geeignete Verschiebungen auf der  $t$ -Achse an den Phasenübergängen glatt ineinander überführt werden.

Bezeichne  $a(t)$  den aus diesen Lösungen für die jeweils dominierende Phase zusammengesetzten Skalenfaktor. Wir werden über diese Näherung für den tatsächlichen Skalenfaktor des Expansionsmodells die Dauer der Strahlungs-Ära im Verhältnis zum Weltalter abschätzen.

Für das Weltalter, das durch verschiedene Messungen gut bestätigt ist [10], verwenden wir hier [11]

$$t_0 = (13.787 \pm 0.020) \text{ Milliarden Jahre} = (4.354 \pm 0.007) \cdot 10^{17} \text{ s} . \quad (1.2.3)$$

In Anbetracht des für die Hubble-Konstante  $H_0$  gemessenen Wertespektrum von 67-74  $km/sMpc$  und  $1/t_0 \approx 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ 1/s} \approx 71.3 \text{ km/sMpc}$  gilt deshalb

$$t_0 \approx H_0^{-1} . \quad (1.2.4)$$

Die Temperatur des Universums entwickelt sich reziprok zum Skalenfaktor, was sich aus der Zerlegung der Dichte  $\rho$  in die kalte und die relativistische Materie aus 1.1.6 ergibt

$$\text{Temperatur} \sim \frac{\text{Energie}}{\text{Teilchen}} \sim \frac{\rho_{rad}}{\rho_{mat}} \sim \frac{1/a^4}{1/a^3} = \frac{1}{a} .$$

Zur Abschätzung der Dauer der Strahlungs-Ära  $t_r$  gehen wir grob von  $3K$  für die heutige Temperatur des Universums aus <sup>4</sup> und von etwa  $3000K$  am Ende der Strahlungs-Ära, dann ergibt sich aus der obigen Proportionalität, dass der Wert für den heutigen Skalenfaktor tausendmal größer sein muss als am Ende der Strahlungs-Ära

$$\frac{a(t_0)}{a(t_r)} = \frac{3000}{3} = 10^3 . \quad (1.2.5)$$

Unter Vernachlässigung der  $\Lambda$  dominierten Ära erhalten wir daraus durch Zurückrechnen mit der Expansionsdynamik der Materie-Ära

$$\left( \frac{\dot{a}(t_r)}{a(t_r)} \right)^2 = \frac{\frac{8\pi G}{3} C_{mat}}{a(t_r)^3} = \frac{\frac{8\pi G}{3} C_{mat}}{a(t_0)^3} \left( \frac{a(t_0)}{a(t_r)} \right)^3 = H_0^2 \cdot 10^9 . \quad (1.2.6)$$

Nach 1.2.2 gilt für den Skalenfaktor während der Strahlungs-Ära  $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$ . Wegen des glatten Phasenübergangs am Zeitpunkt  $t_r$  gewinnen wir daraus zusammen mit 1.2.4 schließlich die folgende Näherung für die Dauer der Strahlungs-Ära

$$t_r = \frac{1}{2\sqrt{H_0^2 \cdot 10^9}} = \frac{1}{2} H_0^{-1} \cdot 10^{-\frac{9}{2}} \approx \frac{1}{2} t_0 \cdot 10^{-\frac{9}{2}} \\ \approx 220.000 \text{ j} .$$

---

<sup>4</sup>Genauer beträgt die heutige Temperatur der Hintergrundstrahlung 2.725 K.

Wie in der Abbildung 1.2 skizziert und im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, befinden wir uns heute bereits in der beschleunigten Expansionsphase der  $\Lambda$  dominierten Ära, weshalb genauere Berechnungen etwa 300.000 Jahre für die Dauer der Strahlungs-Ära ergeben [5]. Dieser Wert liegt deutlich unterhalb der angegebenen Messgenauigkeit für das Weltalter 1.2.3, so dass wir wegen  $\Delta t < t_r$  (siehe Abbildung 1.2) zur Bestimmung des Weltalters  $\Delta t = 0$  annehmen dürfen.

Ohne die dunkle Energie ergibt sich also das Weltalter in ausreichender Genauigkeit aus der Expansionsdynamik der Materie-Ära und wir erhalten bei Vernachlässigung der Strahlung gemäß 1.2.2 für den Skalenfaktor des sogenannten Einstein-de-Sitter Modells

$$a(t) = t^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}. \quad (1.2.7)$$

Hieraus ergibt sich aber das zu kleine Weltalter  $\frac{2}{3}H_0^{-1} \approx \frac{2}{3}t_0$  (siehe 1.2.4). Dies liegt daran, dass hierbei für die heutige Dichte  $\rho_0$  der zu große Wert der kritischen Dichte  $\rho_c$  (1.1.4) vorausgesetzt wird, deren größere Masse die Expansion stärker abbremst, wodurch die heutige Expansionsrate  $H_0$  früher erreicht und damit das entsprechend kleinere Weltalter erklärt wird.

Andererseits würde für die Materiedichte  $\rho_0 < \rho_c$ , wie bereits im letzten Abschnitt 1.1 erläutert, aufgrund der defizitären Energiebilanz zwischen der kinetischen und der (in diesem Fall) potentiellen Energie, die Expansion ohne dunkle Energie zu einer Krümmung der Raum-Zeit führen.

Um diese Zusammenhänge formal zu beschreiben, können die verschiedenen Beiträge zur Energiedichte des Universums nicht länger separat voneinander betrachtet werden.

### 1.3 Expansion nach dem Standardmodell

Das Standardmodell der Kosmologie basiert auf den FG'en und beschreibt unter anderem die Werte für deren Dichteparameter, die eine bestmögliche Übereinstimmung mit den Beobachtungen der kosmologischen Expansion zeigen [6]. Die gebräuchliche Darstellung für die Dichteparameter ergibt sich durch Normierung der 1. FG auf die heutige Expansionsrate  $H_0$

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_M}{a(t)^3} - \frac{\Omega_k}{a(t)^2} + \Omega_\Lambda, \quad (1.3.1)$$

$$\text{mit } \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0, \quad \Omega_k = \frac{kc^2}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}.$$

Denn mithilfe dieser Normierung auf die kinetische Energie der heutigen Expansion ergibt sich für  $a(t_0) = 1$  der folgende Zusammenhang

$$1 = \Omega_M - \Omega_k + \Omega_\Lambda.$$

In einem ungekrümmten Universum ( $\Omega_k = k = 0$ ) entspricht deshalb die Energiedichte des Universums  $\Omega_M + \Omega_\Lambda$  der kritischen Dichte  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ . Demzufolge wird nur für das Einstein-de-Sitter Modell aus 1.2.7 mit  $\Omega_M = 1$  bzw.  $\rho_0 = \rho_c$  eine krümmungsfreie Expansion ohne dunkle Energie erklärt; für kleinere Werte von  $\rho_0$  muss deswegen  $\Omega_\Lambda > 0$  gelten. Die krümmungsfreie Expansion mit dunkler Energie wird beschrieben durch den Skalenfaktor [3]

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}} \sinh(\omega t)^{2/3} \quad \text{mit } \omega = \frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}, \quad (1.3.2)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}\right).$$

Die sichtbare Materie beträgt aber weniger als 5% der kritischen Dichte. Durch Einsetzen der entsprechenden Parameter  $\Omega_M = 0.05$  und  $\Omega_\Lambda = 0.95$  ergibt sich aus 1.3.2 im Gegensatz zum Einstein-de-Sitter Modell 1.2.7 nun ein zu großes Weltalter, das nicht mehr mit der heutigen Temperatur der Hintergrundstrahlung vereinbar ist. Aus diesem Grund wird angenommen, dass die kosmologische Expansion durch die gravitative Wirkung (der nicht sichtbaren) dunklen Materie eine zusätzliche Abbremsung erfährt.

Im Standardmodell wird der Anteil der baryonischen (sichtbaren) und der dunklen Materie zusammengenommen mit ungefähr 30% angegeben [6]. Der überwiegende Teil von 70% wird dabei der dunklen Energie zugeschrieben. Für die entsprechenden Parameterwerte  $\Omega_M = 0.3$  und  $\Omega_\Lambda = 0.7$  ergibt sich aus 1.3.2 zu dem Weltalter 1.2.3 die Hubble-Konstante des Standardmodells  $H_0 = 68 \text{ km/sMpc}$ , deren Wert aber im Widerspruch zu den zum Teil stark abweichenden direkten Messungen der Hubble-Konstanten steht, wofür wir im Abschnitt 2.5 eine Erklärung geben werden.



Aufgrund der heutigen Dominanz der dunklen Energie befinden wir uns, wie in der Abbildung 1.2 dargestellt, bereits in der beschleunigten Phase der Expansion. Dies sieht man mithilfe des sogenannten Bremsparameters, der sich durch Normierung der 2. FG ergibt

$$q(t) = -\frac{1}{H(t)^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{4\pi G}{3H(t)^2} \rho(t) - \frac{\Lambda c^2}{3H(t)^2}, \quad (1.3.3)$$

wobei dessen Vorzeichen sowie die Namensgebung historisch bedingt sind. Dem Vorzeichen des Bremsparameters ist also zu entnehmen, ob zu einem Zeitpunkt  $t$  die Expansion beschleunigt ( $q(t) < 0$ ) oder gebremst ( $q(t) > 0$ ) ist. Zu den Werten der Dichteparameter  $\Omega_M = 0.3$  und  $\Omega_\Lambda = 0.7$  ergibt sich aus 1.3.3 für den heutigen Zeitpunkt eine beschleunigte Expansion

$$q_0 = q(t_0) = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \cdot 0.3 - 0.7 < 0.$$

Aufgrund der enormen Entfernungen, in denen sich die Objekte für den Nachweis der beschleunigten Expansion befinden, konnte diese lange Zeit nicht durch Beobachtungen bestätigt werden. Dies gelang erst 1998, worauf wir im Abschnitt 3.1 genauer eingehen werden.

Dem Standardmodell zufolge wird die kosmologische Expansion zu über 95% von unbekanntem physikalischen Phänomenen bestimmt<sup>5</sup>, da sowohl die dunkle Materie als auch die dunkle Energie bisher keine nähere Erklärung zu ihrer physikalischen Natur bieten. Beispielsweise scheiterte der Versuch die dunkle Energie durch Erzeugung von anti-gravitativ wirkender Vakuumenergie zu erklären, da das Resultat um so viele Zehnerpotenzen abwich, dass diese Diskrepanz schon ironisch als »die schlechteste Vorhersage in der Geschichte der Physik« umschrieben wurde.

Wir werden im folgenden Kapitel ein Expansionsmodell vorstellen, das auf Grundlage einer elementaren Abhängigkeit der Gravitationswirkung von der zeitlichen Entwicklung der Dichte des Universums sowohl das Weltalter  $t_0$  als auch die Expansionsrate  $H_0$  erklärt, ohne dafür die spekulativen Phänomene der dunklen Materie und der dunklen Energie zu benötigen.

---

<sup>5</sup>Wegen der Dominanz der durch  $\Lambda$  beschriebenen dunklen Energie und der dunklen Materie (engl. Cold Dark Matter) für die Beschreibung der kosmologischen Expansion wird das Standardmodell auch als  $\Lambda$ -CDM-Modell bezeichnet.

## 2 Die dichteunabhängige Expansionsdynamik

In der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) wird die Gravitation auf die Eigenschaft der Materie die Raum-Zeit zu krümmen zurückgeführt.

Wie im letzten Kapitel erläutert wurde, konnte A. Friedmann zeigen, dass die Feldgleichungen der ART unter Annahme des kosmologischen Prinzips auf dynamische Modelle für das Universum führen, die für eine konstante Gravitation im Allgemeinen eine gekrümmte Raum-Zeit erklären, die sich mit den Beobachtungen aber nicht vereinbaren lässt.

In diesem Kapitel werden wir in Anlehnung an die Ergebnisse Friedmanns ein Modell auf Grundlage Newtonscher Mechanik entwickeln, das basierend auf einer von der kosmologischen Expansion zeitlich abhängigen Gravitation analog zum Einstein-de-Sitter Modell immer eine ungekrümmte Raum-Zeit beschreibt. In weiterer Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigt die Expansionsrate dieses Modells ohne dunkle Materie und dunkle Energie zum Weltalter des Standardmodells eine signifikante Übereinstimmung mit dem im Jahr 2019 von W. Freedman gemessenen Wert für die Hubble-Konstante.

Wir gehen von der Grundannahme aus, dass durch den reziproken Wert der Dichte des Universums eine Raum-Materie Relation beschrieben wird, deren durch die kosmologische Expansion bedingte Dehnung eine Zunahme der Gravitationskraft bewirkt. Dabei ist die Gravitationskraft proportional zur Beschleunigung dieser Dehnung und wird dementsprechend nicht durch die Gravitationskonstante  $G$ , sondern durch die von der kosmologischen Zeit  $t$  abhängigen Gravitationsfunktion

$$\tilde{G}(t) = \tilde{g} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\rho(t)} \right) \quad (2.0.1)$$

mit der einheitenlosen Proportionalitätskonstanten  $\tilde{g} > 0$  beschrieben.

**Bemerkung 2.1.** *Obwohl die Gravitationsfunktion  $\tilde{G}(t)$  wohldefiniert ist und ihre physikalische Einheit mit der von  $G$  übereinstimmt, ist zunächst nicht klar, ob sie überhaupt mit der ART vereinbar ist. Vielmehr setzen wir dies in dieser Arbeit voraus, indem wir annehmen, dass die resultierende Expansion über die durch  $\tilde{G}(t)$  erklärten zeitlich abhängigen Gravitationsfelder beschrieben werden kann.*

Im Sinne der Bemerkung 2.1 werden wir in Analogie zur 2. FG mit  $\Lambda = 0$  die für  $\tilde{G}$  resultierende Expansion durch Substitution von  $G$  im Newtonschen Gravitationsgesetz ableiten. Zur terminologischen Unterscheidung der jeweils verwendeten Proportionalitätskonstanten werden wir im Folgenden von der konstanten bzw. der dichteabhängigen Gravitation sprechen.

## 2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Wir werden in diesem Abschnitt die aus der dichteabhängigen Gravitation resultierende Expansionsdynamik wie im Abschnitt 1.2 für die idealisierten Bewegungsgleichungen in der Strahlungs- und der Materie-Ära herleiten. Dabei wird sich zeigen, dass die Bewegungsgleichungen keine unmittelbaren Abhängigkeiten von der zeitlichen Entwicklung der Dichte besitzen, weshalb wir die aus der dichteabhängigen Gravitation resultierende Dynamik auch als dichteunabhängige Expansionsdynamik bezeichnen.

Bezeichne  $t_r$  die Dauer der Strahlungs-Ära, die aus der Expansion für die dichteabhängigen Gravitation resultiert, dann kann bei Vernachlässigung der Strahlung in der Materie-Ära  $\rho(t) = \rho_{mat}(t)$  für  $t \geq t_r$  angenommen werden (siehe 1.2.7) und man erhält mit der üblichen Festlegung  $a(t_0) = 1$

$$\rho(t) = \rho_0/a(t)^3 .$$

Dies eingesetzt in 2.0.1 führt nach 2-maliger Differenzierung auf die folgende Darstellung der Gravitationsfunktion für die Materie-Ära

$$\tilde{G}(t) = \frac{\tilde{g}}{\rho_0} \frac{d^2}{dt^2} (a(t)^3) = \frac{\tilde{g}}{\rho_0} (6a(t)\dot{a}(t)^2 + 3a(t)^2\ddot{a}(t)) . \quad (2.1.1)$$

Wie einleitend in Bemerkung 2.1 erläutert, gehen wir davon aus, dass wie bei der konstanten Gravitation die Expansion für diese Gravitation von den durch  $\tilde{G}$  induzierten Gravitationsfeldern beschrieben wird. Deshalb erhalten wir durch Substitution von  $G$  im Newtonschen Gravitationsgesetz bzw. in der unter diesen Voraussetzungen dazu äquivalenten 2. FG (siehe auch 1.1.3 und Abbildung 1.1)

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3} \tilde{G}(t)\rho(t) .$$

Durch Einsetzen von 2.1.1 folgt daraus nach leichter Umformung

$$\ddot{a}(t) = -4\pi\tilde{g} \left( 2\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)} - \ddot{a}(t) \right) ,$$

woraus wir dann die folgende Differentialgleichung für den Skalenfaktor zur Expansion der dichteabhängigen Gravitation in der Materie-Ära erhalten

$$Aa(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 = 0 \quad (t \geq t_r) \quad \text{mit} \quad A = \frac{1 + 4\pi\tilde{g}}{8\pi\tilde{g}} > \frac{1}{2} . \quad (2.1.2)$$

Im Gegensatz zur konstanten Gravitation ist also die Expansion aufgrund der Dichteabhängigkeit der Gravitation während der Materie-Ära von der Dichte unabhängig, da deren Dynamik ausschließlich über den Parameter  $A$  von der Proportionalitätskonstanten  $\tilde{g}$  bestimmt wird.

Analog können wir für die Strahlungs-Ära der Expansion  $\rho(t) = \rho_{rad}(t)$  für  $t \leq t_r$  annehmen, dann gilt für eine geeignet gewählte Konstante  $C_{rad}$  (siehe auch 1.1.6)

$$\rho(t) = \frac{C_{rad}}{a(t)^4} .$$

Dies führt eingesetzt in 2.0.1 nach 2-maliger Differenzierung auf die folgende Darstellung der Gravitationsfunktion in der Strahlungs-Ära

$$\tilde{G}(t) = \frac{\tilde{g}}{C_{rad}} \frac{d^2}{dt^2} (a(t)^4) = \frac{\tilde{g}}{C_{rad}} (12a(t)^2 \dot{a}(t)^2 + 4a(t)^3 \ddot{a}(t)) . \quad (2.1.3)$$

Bei Verwendung dieser Darstellung in der für  $\tilde{G}$  adaptierten 2. FG ist zu berücksichtigen, dass die Strahlung nicht nur durch ihre Masse, sondern auch durch den Strahlungsdruck gravitativ wirkt (siehe 1.1.8), woraus sich dann die bezüglich des Parameters  $B$  abweichende Differentialgleichung für den Skalenfaktor während der Strahlungs-Ära ergibt

$$Ba(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 = 0 \quad (t \leq t_r) \quad \text{mit} \quad B = \frac{3 + 32\pi\tilde{g}}{96\pi\tilde{g}} > \frac{1}{3} . \quad (2.1.4)$$

Wie in der Materie-Ära ist also die Expansionsdynamik auch während der Strahlungs-Ära unabhängig von der Dichte  $\rho(t)$  und wird damit vollständig über den Parameter  $B$  durch die Proportionalitätskonstante  $\tilde{g}$  beschrieben.

Bevor wir in den nächsten Abschnitten die weiteren Eigenschaften für die dichteunabhängigen Expansionsdynamiken aus den analytischen Lösungen der beiden Differentialgleichungen ableiten, sollen zuvor die resultierenden Expansionsraten bestimmt werden, wie sie bei der konstanten Gravitation durch die 1. FG beschrieben werden. Teilen wir die Differentialgleichung 2.1.2 durch  $a(t)^2 > 0$

$$A \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H(t)^2 = \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = -A \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} ,$$

dann erhalten wir aus 2.1.1 den Zusammenhang

$$\tilde{G}(t) = 3\tilde{g} \left( 2 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right) \frac{a(t)^3}{\rho_0} = 3\tilde{g} \left( 2 - \frac{1}{A} \right) \frac{H(t)^2}{\rho(t)} .$$

Dabei gilt nach 2.1.2 für die Parameter

$$A = \frac{1 + 4\pi\tilde{g}}{8\pi\tilde{g}} = \frac{1/\tilde{g} + 4\pi}{8\pi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g} = \frac{1}{4\pi(2A - 1)} \quad (2.1.5)$$

und damit

$$3\tilde{g} \left( 2 - \frac{1}{A} \right) = \frac{3}{4\pi} \frac{(2 - 1/A)}{(2A - 1)} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{A} .$$

Hieraus ergibt sich für die Gravitationsfunktion schließlich die Darstellung

$$\tilde{G}(t) = \frac{3}{4\pi} \frac{H(t)^2}{A\rho(t)} \quad (2.1.6)$$

und man erhält die Expansionsrate der dichteabhängigen Gravitation für die idealisierte Materie-Ära durch das folgende Pendant zur 1. FG

$$H(t)^2 = \frac{8\pi}{3} \tilde{G}(t) \frac{A}{2} \rho(t) , \quad (2.1.7)$$

das für  $A = 2$  rein formal auf die 1. FG mit  $k = 0$  und  $\Lambda = 0$  führt (1.1.1). Analog erhalten wir aus 2.1.3 und der Differentialgleichung 2.1.4 für die Gravitationsfunktion in der Strahlungs-Ära die Darstellung

$$\tilde{G}(t) = 4\tilde{g} \left( 3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right) \frac{a(t)^4}{C_{rad}} = 4\tilde{g} \left( 3 - \frac{1}{B} \right) \frac{H(t)^2}{\rho(t)} .$$

Aus 2.1.4 folgt für die Parameter

$$B = \frac{3 + 32\pi\tilde{g}}{96\pi\tilde{g}} = \frac{3/\tilde{g} + 32\pi}{96\pi} \Rightarrow \tilde{g} = \frac{3}{32\pi(3B - 1)}$$

und daraus

$$4\tilde{g} \left( 3 - \frac{1}{B} \right) = 4 \frac{3}{32\pi(3B - 1)} \frac{3B - 1}{B} = \frac{3}{8\pi B} .$$

Damit ergibt sich die Expansionsrate der dichteabhängigen Gravitation in der idealisierten Strahlungs-Ära aus dem folgenden Pendant zur 1. FG

$$H(t)^2 = \frac{8\pi}{3} \tilde{G}(t) B\rho(t) . \quad (2.1.8)$$

Die in der Grundannahme 2.0.1 spezifizierte Proportionalitätskonstante  $\tilde{g}$  spielt für die dichteabhängige Gravitation die Rolle einer Naturkonstanten. Dabei sind über  $\tilde{g}$  die Parameterwerte  $A$  und  $B$  der Bewegungsgleichungen 2.1.2 und 2.1.4 für die Materie-Ära bzw. die Strahlungs-Ära bestimmt, über die sich die Gewichtungen der Dichte in den Pendants der 1. FG aus 2.1.7 sowie 2.1.8 beschreiben lassen.

**Bemerkung 2.2.** *Wie bereits eingangs erwähnt, beschreiben die Pendants der 1. FG in 2.1.7 und 2.1.8 eine idealisierte Expansionsdynamik, die aber für  $t \ll t_r$  bzw.  $t_r \ll t$  als hinreichend genau angenommen werden kann. Deshalb wird auch die wegen  $B < A/2$  naheliegende Annahme, dass sich die exakte Expansionsdynamik für die dichteabhängige Gravitation über die idealisierten Dynamiken durch zeitlich abhängige Gewichtungen der Dichte im Intervall  $(B, A/2)$  beschreiben lässt, hier nicht weiter verfolgt.*

## 2.2 Beschreibung des Skalenfaktors

Entsprechend Bemerkung 2.2 wird in diesem Abschnitt der Skalenfaktor zur dichteunabhängigen Expansionsdynamik analog zum Abschnitt 1.2 durch einen glatten Übergang zwischen den separaten Lösungen für die beiden Differentialgleichungen 2.1.2 und 2.1.4 näherungsweise beschrieben.

Aus der Differentialgleichung 2.1.2 erhalten wir für den Skalenfaktor in der Materie-Ära die folgende Darstellung (siehe Satz 1. im Anhang)

$$a(t) = \left[ \frac{A+1}{A} (c_0 t + c_m) \right]^{\frac{A}{A+1}} \quad \text{für } t \geq t_r \quad (2.2.1)$$

mit den zunächst freien Parametern  $c_0 > 0, c_m \geq 0$ . Durch Bildung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= c_0 \left[ \frac{A+1}{A} (c_0 t + c_m) \right]^{-\frac{1}{A+1}}, \\ \ddot{a}(t) &= -\frac{c_0^2}{A} \left[ \frac{A+1}{A} (c_0 t + c_m) \right]^{-\frac{A+2}{A+1}} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

gewinnen wir für die Hubble-Funktion in der Materie-Ära die Darstellung

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = c_0 \left[ \frac{A+1}{A} (c_0 t + c_m) \right]^{-1}. \quad (2.2.3)$$

Aus 2.2.1 folgt mit der üblichen Festlegung  $a(t_0) = 1$

$$\left[ \frac{A+1}{A} (c_0 t_0 + c_m) \right] = 1, \quad (2.2.4)$$

woraus sich zusammen mit 2.2.3 unmittelbar  $c_0 = H(t_0) = H_0$  ergibt.

Der freie Parameter  $c_m$  beschreibt die zeitliche Translation mit deren Hilfe wir im Anschluss den glatten Übergang für die beiden Expansionsdynamiken von der Strahlungs- in die Materie-Ära umsetzen (siehe Abbildung 1.2). Entsprechend folgern wir für den Skalenfaktor in der Strahlungs-Ära, der sich analog aus der Differentialgleichung 2.1.4 ergibt und wegen  $a(0) = 0$  keine zeitliche Translation besitzt

$$a(t) = \left[ \frac{B+1}{B} c_r t \right]^{\frac{B}{B+1}} \quad (0 \leq t \leq t_r) \quad \text{mit } c_r > 0. \quad (2.2.5)$$

Wie in der Bemerkung 2.2 bereits dargelegt wurde, bieten die Lösungen für die Differentialgleichungen 2.1.2 und 2.1.4 nur Näherungen für die durch die dichteabhängige Gravitation beschriebene kosmologische Expansion, die aber für die weiteren Betrachtungen ausreichend sind.

Aus diesem Grund werden wir den aus diesen Lösungen zusammengesetzten Skalenfaktor

$$a(t) = \begin{cases} t \in [t_r, \infty) : \left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t + c_m) \right]^{\frac{A}{A+1}} & \text{mit } A = \frac{1+4\pi\tilde{g}}{8\pi\tilde{g}} > \frac{1}{2} \\ t \in [0, t_r] : \left[ \frac{B+1}{B} c_r t \right]^{\frac{B}{B+1}} & \text{mit } B = \frac{3+32\pi\tilde{g}}{96\pi\tilde{g}} > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

in den folgenden Abschnitten mit dem Skalenfaktor der dichteabhängigen Gravitation formal identifizieren.

Dabei ergeben sich die Werte für die freien Parameter aus dem glatten Übergang zwischen der Strahlungs- und Materie-Ära, der am gemeinsamen Zeitpunkt  $t_r$  eine identische Expansionsrate  $H(t_r)$  bedingt. Dies führt für die Hubble-Funktion der Materie-Ära aus 2.2.3 und ihrem Pendant für die Strahlungs-Ära zusammen mit 2.2.1 und 2.2.5 auf die Gleichungen

$$\frac{a(t_r)^{\frac{A+1}{A}}}{H_0} = \frac{\left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t_r + c_m) \right]}{H_0} = \frac{1}{H(t_r)} = \frac{\left[ \frac{B+1}{B} c_r t_r \right]}{c_r} = \frac{a(t_r)^{\frac{B+1}{B}}}{c_r}, \quad (2.2.7)$$

aus denen sich nach leichter Umformung die folgenden Abhängigkeiten für die freien Parameter ergeben

$$\begin{aligned} c_m &= H_0 t_r \left( \frac{A(B+1)}{B(A+1)} - 1 \right), \\ c_r &= H_0 a(t_r)^{\frac{A-B}{AB}}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Dabei gilt für die Parameter  $A$  und  $B$  wegen  $\tilde{g} = 1/4\pi(2A-1)$  (siehe 2.1.2)

$$B = \frac{3 + 32\pi\tilde{g}}{96\pi\tilde{g}} = \frac{3 + 8\frac{1}{2A-1}}{24\frac{1}{2A-1}} = \frac{3(2A-1) + 8}{24} = \frac{6A+5}{24}. \quad (2.2.9)$$

In den nächsten Abschnitten werden wir den Wert für den Parameter  $A$  der Materie-Ära bestimmen, wodurch dann die Proportionalitätskonstante  $\tilde{g}$  als auch der Parameter  $B$  der Strahlungs-Ära und damit wegen der Bedingung eines glatten Übergangs zwischen der Strahlungs- und der Materie-Ära die freien Parameter  $c_m$  und  $c_r$  festgelegt werden.

## 2.3 Erweiterung des Einstein-de-Sitter Modells

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, warum aus der dichteunabhängigen Expansionsdynamik immer eine ungekrümmte Raum-Zeit resultieren muss und werden die weiteren Analogien zum Einstein-de-Sitter Modell erörtern.

Zur Untersuchung der Analogien zum Einstein-de-Sitter Modell treffen wir zuallererst die grundlegende Annahme

$$\tilde{G}(t_0) = G . \quad (2.3.1)$$

Für die Herleitung der zeitlichen Entwicklung von  $\tilde{G}$  betrachten wir die 2-te Ableitung von 2.2.1

$$\frac{d^2}{dt^2} (a(t)^3) = 3H_0^2 \frac{2A-1}{A} \left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t + c_m) \right]^{\frac{A-2}{A+1}} ,$$

aus der wir entsprechend 2.1.1 mit  $\tilde{g} = 1/4\pi(2A-1)$  (siehe 2.1.5) und 2.1.6 die folgende Darstellung für die Gravitationsfunktion gewinnen

$$\begin{aligned} \tilde{G}(t) &= \frac{3}{4\pi} \frac{H_0^2}{A\rho_0} \left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t + c_m) \right]^{\frac{A-2}{A+1}} \\ &= \tilde{G}(t_0) \left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t + c_m) \right]^{\frac{A-2}{A+1}} . \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Mit der Identität

$$\left[ \frac{A+1}{A} (H_0 t + c_m) \right]^{\frac{A-2}{A+1}} = \left( a(t)^{\frac{A+1}{A}} \right)^{\frac{A-2}{A+1}} = a(t)^{\frac{A-2}{A}}$$

erhalten wir daraus schließlich den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Gravitationsfunktion  $\tilde{G}(t)$  und der Gravitationskonstanten  $G$

$$\tilde{G}(t) = \tilde{G}(t_0) a(t)^{\frac{A-2}{A}} = G a(t)^{\frac{A-2}{A}} . \quad (2.3.3)$$

Unter der Annahme 2.3.1 entspricht also die dichteabhängige Gravitation für  $A = 2$  der konstanten Gravitation und erklärt damit die im Abschnitt 2.1 erwähnte formale Übereinstimmung mit der 1. FG für diesen Parameterwert. Entsprechend ergibt sich aus 2.2.6 für die dichteabhängige Gravitation bei Vernachlässigung der Strahlungs-Ära ( $c_m = 0$ ) der Skalenfaktor für das Einstein-de-Sitter Modell mit  $a(t_0) = 1$  (siehe 1.2.7) <sup>6</sup>

$$a(t) = \left[ \frac{3}{2} H_0 t \right]^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{t}{\frac{2}{3} H_0^{-1}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} . \quad (2.3.4)$$

<sup>6</sup>Wobei  $t_0$  in diesem Fall das Weltalter des Einstein-de-Sitter Modells bezeichnet, das nur ungefähr  $\frac{2}{3}$  des Weltalters aus 1.2.3 beträgt.



Das Einstein-de-Sitter Modell erfordert wegen der angenommenen Konstanz der Gravitation zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  ein ausgeglichenes Verhältnis zwischen der kinetischen Expansionsenergie  $H_0^2$  und der Energiedichte  $\rho_0$ . Dies führt, wie im Abschnitt 1.3 erläutert, auf die Bedingung

$$1 = \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 , \quad (2.3.5)$$

die aber den Beobachtungen zufolge wegen  $\rho_0 < \rho_c = 3H_0^2/8\pi G$  nicht erfüllt ist, weshalb die dunkle Materie und die dunkle Energie benötigt wird, um die ansonsten defizitäre Energiedichte zu der kritischen Dichte  $\rho_c$ , die eine gekrümmte Raum-Zeit zur Folge hätte, auszugleichen.

Diese Implikation gilt für die dichteabhängige Gravitation nicht. Denn in Übereinstimmung mit der Bedingung 2.3.5 folgt für das Pendant der 1. FG zur dichteunabhängigen Expansionsdynamik in der Materie-Ära aus 2.1.7

$$1 = \frac{8\pi \tilde{G}(t) A}{3H(t)^2} \frac{\rho(t)}{2} . \quad (2.3.6)$$

Wegen der Dichteabhängigkeit der durch  $\tilde{G}(t)$  beschriebenen Gravitation entspricht die kinetische Expansionsenergie  $H(t)^2$  also immer genau der durch  $\rho(t)$  beschriebenen Energiedichte des Universums. Da dies nach 2.1.8 auch für die Strahlungs-Ära gilt, werden wir im Weiteren davon ausgehen, dass durch die dichteunabhängige Expansionsdynamik ganz allgemein eine ungekrümmte Raum-Zeit beschrieben wird <sup>7</sup>.

**Bemerkung 2.3.** *Streng genommen ist diese Bedingung nur bei konstanter Gravitation hinreichend für eine ungekrümmte Raum-Zeit, da diese aus der Robertson-Walker-Metrik resultiert, die für die dichteabhängige Gravitation a priori keine Gültigkeit besitzt (siehe Bemerkung 2.1).*

*Da die Krümmung der Raum-Zeit aber ausschließlich von dem Verhältnis zwischen der kinetischen Energie und der Energiedichte des Universums zum betrachteten Zeitpunkt abhängt, muss diese Bedingung aber auch für die dichteabhängige Gravitation unter der vorausgesetzten Vereinbarkeit mit der ART Gültigkeit besitzen, da die Qualität der Krümmung vom konkreten Wert von  $G$  in 2.3.5 unabhängig ist.*

Dementsprechend kommt der kritischen Dichte  $\rho_c$  im Zusammenhang mit der dichteabhängigen Gravitation eine andere Bedeutung zu. Ausgehend von einer identischen Expansionsrate  $H_0$  folgt aus 2.3.5 und 2.3.6 das allgemeine Verhältnis der konstanten und der dichteabhängigen Gravitationskraft

$$\frac{\tilde{G}(t_0)}{G} = \frac{2}{A} \frac{\rho_c}{\rho_0} .$$

---

<sup>7</sup>Eigentlich lässt sich dies nur für die idealisierten Näherungen der Expansionsdynamik in dieser Allgemeinheit folgern (siehe Bemerkung 2.2). Wegen  $t_r \ll t_0$  können wir aber davon ausgehen, dass eine etwaig vorhandene Krümmung der Raum-Zeit im heutigen Universum verschwindend gering wäre.

Dies führt aufgrund der in 2.3.1 getroffene Annahme  $\tilde{G}(t_0) = G$  auf den folgenden Zusammenhang zwischen dem Wert des Parameters  $A$  und der kritischen Dichte  $\rho_c$

$$A = 2 \frac{\rho_c}{\rho_0} , \quad (2.3.7)$$

der mit der daraus resultierenden Äquivalenz  $\rho_c = \rho_0 \Leftrightarrow A = 2$  zusammen mit der Gleichung 2.3.3 insbesondere die Bedeutung der kritischen Dichte für das Einstein-de-Sitter Modell widerspiegelt.

Dabei resultiert der Zusammenhang 2.3.7 aus der Festlegung  $\tilde{G}(t_0) = G$ . Im Allgemeinen besteht nach 2.3.6 der folgende Zusammenhang zwischen der kritischen Dichte  $\rho_c$  und dem Parameterwert  $A$  <sup>8</sup>

$$\rho_c(t) = 3H(t)^2/8\pi\tilde{G}(t) \quad \Leftrightarrow \quad A = 2 \frac{\rho_c(t)}{\rho(t)} .$$

Abweichungen der Dichte  $\rho$  von der kritischen Dichte  $\rho_c$  führen demzufolge anders als im Falle der konstanten Gravitation nicht zu einer gekrümmten Raum-Zeit, sondern zu einer veränderlichen Gravitationswirkung, die für jeden Zeitpunkt auf ein ausgewogenes Verhältnis zwischen der kinetischen Expansionsenergie und der Energiedichte hinwirkt, weshalb dieses Modell als Erweiterung des Einstein-de-Sitter Modells aufgefasst werden kann.

Nach 2.3.7 bestimmt die heutige Dichte  $\rho_0$  über ihr Verhältnis zur kritischen Dichte  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$  den Parameterwert  $A$ , für den die dichteabhängige Gravitation eine Expansion erklärt, die für den heutigen Zeitpunkt  $t_0$  auf die Gravitationskonstante  $G$  und die Hubble-Konstante  $H_0$  führt. Obwohl also die resultierende Expansion über den Parameterwert  $A$  quantitativ von der Dichte  $\rho_0$  abhängt, trifft dies nicht auf ihre mit dem Einstein-de-Sitter Modell gemeinsame dynamische Qualität zu, worüber deren Bezeichnung als dichteunabhängige Expansionsdynamik gerechtfertigt wird.

Wegen  $\rho_0 < \rho_c$  wird durch die dichteabhängige Gravitation gemäß 2.3.3 eine mit der Zeit zunehmende Gravitationswirkung erklärt.

Im Folgenden werden wir die empirischen Eigenschaften der Expansion für die dichteabhängige Gravitation ohne Berücksichtigung der dunklen Materie betrachten, indem wir bei der Bestimmung des Parameterwertes  $A = 2\rho_c/\rho_0$  die heutige Dichte  $\rho_0$  ausschließlich auf die baryonische Materie beziehen. Damit werden wir zum Abschluss dieses Kapitels aus dem Weltalter 1.2.3 den Wert der Hubble-Konstanten für diese Expansion bestimmen.

Als Vorbereitung müssen wir aber zunächst die Dauer der Strahlungs-Ära für die dichteunabhängige Expansionsdynamik abschätzen.

---

<sup>8</sup>Ganz analog gilt dies für die Expansionsdynamik der Strahlungs-Ära. Dabei ist zu berücksichtigen, dass das Verhältnis der Dichten  $\rho_c(t)/\rho(t)$  für die idealisierten Expansionsdynamiken konstant ist.

## 2.4 Dauer der Strahlungs-Ära

Die Dauer der Strahlungs-Ära zur dichteunabhängigen Expansionsdynamik wird nach 2.2.7 näherungsweise beschrieben durch

$$t_r = \frac{B}{B+1} H(t_r)^{-1} . \quad (2.4.1)$$

Wie bereits im Abschnitt 1.3 erwähnt, beträgt der Anteil der baryonischen Materie an der kritischen Dichte weniger als 5%. Damit folgt aus 2.3.7 die Abschätzung  $2/A = \rho_0/\rho_c < 0.05$ , so dass mit 2.2.9 für die Parameter der dichteabhängigen Gravitation die folgenden groben Näherungen gelten

$$\frac{A+1}{A} \approx 1 \quad \text{und} \quad \frac{B}{B+1} \approx 1 .$$

Wie im ersten Kapitel erläutert, können wir über die zu den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_r$  bekannten Temperaturen im Universum auf das Verhältnis der Werte des Skalenfaktors  $a(t_0)/a(t_r) = 10^3$  schließen (siehe 1.2.5), woraus sich die gesuchte Expansionsrate  $H(t_r)$  durch Zurückrechnen von der heutigen Expansionsrate  $H_0$  bestimmen lässt. Mit 2.3.3 erhalten wir auf diese Weise

$$\begin{aligned} H(t_r)^2 &= \frac{A}{2} \frac{8\pi}{3} \tilde{G}(t_r) \rho(t_r) \\ &= \frac{A}{2} \frac{8\pi}{3} G a(t_r)^{\frac{A-2}{A}} \frac{\rho_0}{a(t_r)^3} \\ &= \frac{A}{2} \frac{8\pi}{3} G \rho_0 \left( \frac{1}{a(t_r)} \right)^{2\frac{A+1}{A}} \\ &= \frac{A}{2} \frac{8\pi}{3} G \rho_0 \left( \frac{1}{a(t_0)} \right)^{2\frac{A+1}{A}} \left( \frac{a(t_0)}{a(t_r)} \right)^{2\frac{A+1}{A}} \\ &= H_0^2 \cdot (10^3)^{2\frac{A+1}{A}} . \end{aligned}$$

Da, wie im Abschnitt 1.2 erläutert,  $H_0^{-1}$  näherungsweise dem Weltalter

$$t_0 = (13.787 \pm 0.020) \text{ Milliarden Jahre} = (4.354 \pm 0.007) \cdot 10^{17} \text{ s}$$

entspricht, ergibt sich mit 2.4.1 und den oben beschriebenen Näherungen für die Parameter  $A$  und  $B$  der dichteabhängigen Gravitation schließlich

$$t_r \approx H_0^{-1} \cdot 10^{-3} \approx t_0 \cdot 10^{-3} \approx 14 \text{ Millionen Jahre} . \quad (2.4.2)$$

Im Abschnitt 1.2 hatten wir für die die Dauer der Strahlungs-Ära ungefähr 300.000 Jahre angegeben. Damit ist die Dauer der Strahlungs-Ära für die dichteunabhängige Expansionsdynamik rund 50 mal größer als im Standardmodell angenommen; liegt aber dennoch unterhalb der Messungenauigkeit für das Weltalter.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Hubble-Konstante  $H_0$  aus dem Weltalter  $t_0$  bestimmen. Dabei können wir uns trotz der längeren Dauer der Strahlungs-Ära auf die Expansionsdynamik der Materie-Ära beschränken. Für diese Expansionsdynamik gilt nach 2.2.4 der folgende Zusammenhang

$$t_0 = \left( \frac{A}{A+1} - c_m \right) H_0^{-1} = \frac{A}{A+1} H_0^{-1} - \frac{c_m}{H_0} . \quad (2.4.3)$$

Wir wollen nun unter Berücksichtigung der Genauigkeit des Wertes für das Weltalter und für die Näherung von  $t_r$  zeigen, dass die zeitliche Translation  $c_m/H_0$  in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden kann. Wegen 2.2.8 gilt für die zeitliche Translation

$$\frac{c_m}{H_0} = t_r \left( \frac{A(B+1)}{B(A+1)} - 1 \right) .$$

Wegen  $B = (6A+5)/24$  (siehe 2.2.9) und  $2/A = \rho_0/\rho_c < 0.05$  gilt die Abschätzung

$$\frac{A(B+1)}{B(A+1)} - 1 < \frac{B+1}{B} - 1 = \frac{1}{B} = \frac{24}{6A+5} < 1 ,$$

weshalb sich mit der Dauer der Strahlungs-Ära  $t_r$  auch die zeitliche Translation  $c_m/H_0$  unterhalb der für das Weltalter angegebenen Messungenauigkeit bewegt. Aus diesem Grund wird trotz der Vernachlässigung der zeitlichen Translation in 2.4.3 das Verhältnis der Werte von  $t_0$  und  $H_0$  durch

$$t_0 = \frac{A}{A+1} H_0^{-1} = \left( \left( 1 + \frac{1}{A} \right) H_0 \right)^{-1} \quad (2.4.4)$$

in ausreichender Genauigkeit beschrieben.

## 2.5 Bestimmung der Hubble-Konstanten

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die bisher rein auf theoretischen Überlegungen basierenden Erklärungen mit den Beobachtungen abgleichen, indem wir die Hubble-Konstante aus dem Weltalter bestimmen.

Nach 1.3.2 resultieren in Abhängigkeit von den Dichteparametern zu demselben Weltalter unterschiedliche Werte für die Hubble-Konstante. Für das in 1.2.3 angegebene Weltalter  $t_0$  hatten wir bereits im letzten Kapitel zu den Dichteparametern des Standardmodells  $\Omega_M = 0.3$  und  $\Omega_\Lambda = 0.7$  den Wert  $68 \text{ km/sMpc}$  bestimmt, wobei die Werte für die Dichteparameter auf Beobachtungen der Hintergrundstrahlung beruhen.

Wie wir im nächsten Kapitel erläutern werden, weisen Beobachtungen auf Grundlage von Entfernungsbestimmungen, bei denen der Einfluss der Raumausdehnung und damit die Abhängigkeit von den Dichteparametern mit der Entfernung zunimmt, auf einen etwas größeren Anteil an dunkler Energie hin. Für die dort betrachteten Parameter  $\Omega_M = 0.25$  und  $\Omega_\Lambda = 0.75$  ergibt sich aus dem Weltalter  $t_0$  der deutlich größere Wert  $72 \text{ km/sMpc}$ .

Obwohl in den letzten beiden Jahrzehnten über ein Dutzend verschiedene Werte für die Hubble-Konstante auf Basis unterschiedlicher Messverfahren bestimmt wurden, stehen diese beiden Werte exemplarisch für das Dilemma, in dem sich die Kosmologie heute befindet. Aus diesem Grund wurde, um den Wertebereich für die Hubble-Konstante zumindest einzuschränken, von Wendy L. Freedman im Rahmen des *Carnegie-Chicago Hubble Program* der Versuch unternommen den Einfluss der Dichteparameter auf ihre Messung der Hubble-Konstanten möglichst gering zu halten [12]. Dafür beschränkte sie ihre Beobachtungen auf kleinere Entfernungen, in denen aber bereits der zu Beginn des ersten Kapitels erwähnte *Hubble Flow* dominiert, indem sie ausschließlich Supernovae vom Typ Ia (SNe Ia) im Rotverschiebungsbereich  $z < 0.08$  verwendete. Darüber hinaus hat sie die SNe Ia durch eine neue Methode mithilfe Roter Riesen im Nahbereich von max.  $20 \text{ Mpc}$  kalibriert, deren *Tip of the Red Giant Branch*, ausgelöst durch das Heliumbrennen in ihrem Kern, eine nahezu identische Helligkeit im infraroten Bereich aufweist und eine genauere Entfernungsbestimmung als die sonst zur Kalibrierung verwendeten Cepheiden zulässt. Der von Wendy L. Freedman im Jahr 2019 veröffentlichte Wert

$$H_0 = (69.8 \pm 0.8) \frac{\text{km}}{\text{sMpc}} \quad (2.5.1)$$

liegt aber ziemlich in der Mitte des gemessenen Wertespektrums für die Hubble-Konstante, das sich ungefähr zwischen  $67 - 74 \text{ km/sMpc}$  bewegt, und ist deshalb ungeeignet einer der beiden Seiten dieses Wertespektrums den Vorzug zu geben. Dafür besitzt dieser Wert aber eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit der Expansionsrate, die sich ohne Berücksichtigung der dunklen Materie aus der dichteabhängigen Gravitation ergibt.

Dabei liefert diese Übereinstimmung zu dem von Freedman gemessenen Wert zusammen mit den im anschließenden Kapitel vorgestellten Konsequenzen für die Entfernungsbestimmung als Erklärung für die anderen abweichenden Messungen der Hubble-Konstanten das gewichtigste empirische Argument für die Evidenz der dichteabhängigen Gravitation in dieser Arbeit.

Wie im Abschnitt 2.3 erläutert wurde, resultiert aus der Expansion für die dichteabhängige Gravitation zum Parameterwert  $A = 2\rho_c/\rho_0$  rein formal die Hubble-Konstante  $H_0$ , da diese bereits in der Beschreibung der kritischen Dichte  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$  enthalten ist. Um den Wert für die Hubble-Konstante aus dem bereits in 1.2.3 vorgestellten Weltalter

$$t_0 = (4.354 \pm 0.007) \cdot 10^{17} \text{ s} \quad (2.5.2)$$

abzuleiten, müssen wir deshalb zunächst den Wert für das Dichteverhältnis, das wir im letzten Abschnitt grob mit  $\rho_0/\rho_c < 0.05$  abgeschätzt haben, zunächst präzisieren.

Dem Standardmodell zufolge können wir die kritische Dichte  $\rho_c$  wegen der wenn überhaupt vorhandenen verschwindend geringen Krümmung mit der Energiedichte des Universums gleichsetzen. Die Angaben für den Anteil der baryonischen Materie an der Energiedichte des Universums variieren leicht; wir verwenden hier [6]

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = 0.044 \pm 0.0017, \quad (2.5.3)$$

wobei dieser Wert über die kritische Dichte  $\rho_c$  von der Hubble-Konstanten des Standardmodells  $H_0 = 68 \text{ km/sMpc}$  abhängt. Insbesondere deswegen ist es sinnfrei die Hubble-Konstante für die dichteabhängige Gravitation auch bei Kenntnis der Dichte  $\rho_0$  direkt aus 2.5.3 bestimmen zu wollen.

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Dauer der Strahlungs-Ära bei Berücksichtigung der angegebenen Messgenauigkeit für den Wert des Weltalters vernachlässigt werden kann. Dementsprechend wird gemäß 2.4.4 und 2.3.7 die Hubble-Konstante für die dichteabhängige Gravitation über das Weltalter  $t_0$  durch

$$H_0 = \left( \left( 1 + \frac{1}{A} \right) t_0 \right)^{-1} = \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_c} \right) t_0 \right)^{-1} \quad (2.5.4)$$

in ausreichender Genauigkeit beschrieben.

Bereits für das in 2.5.3 angegebene Dichteverhältnis  $\rho_0/\rho_c = 0.044$  ergibt sich aus 2.5.4 eine gute Übereinstimmung mit dem Wert von W. Freedman. Allerdings hätten wir dabei nicht berücksichtigt, dass das Dichteverhältnis über die kritische Dichte  $\rho_c$  von der Hubble-Konstanten  $H_0 = 68 \text{ km/sMpc}$  des Standardmodells abhängt, weshalb wir dessen Wert zunächst für den von W. Freedman gemessenen Wert  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$  anpassen müssen.

Bezeichnen wir zur Unterscheidung die kritische Dichte aus 2.5.3 mit  $\hat{\rho}_c$ , dann erhalten wir für das angepasste Dichteverhältnis

$$\frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{\hat{\rho}_c}{\rho_c} \frac{\rho_0}{\hat{\rho}_c} = \left( \frac{68}{69.8} \right)^2 \cdot 0.044 = 0.041 . \quad (2.5.5)$$

Hierüber ergibt sich schließlich aus 2.5.4 zu dem Weltalter 2.5.2 genau der von W. Freedman gemessene Wert 2.5.1 für die Hubble-Konstante

$$\begin{aligned} H_0 &= \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_c} \right) t_0 \right)^{-1} \\ &= \left( \left( 1 + \frac{0.041}{2} \right) 4.354 \cdot 10^{17} \text{ s} \right)^{-1} \\ &= 2.251 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = 69.8 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}} . \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Dabei ist die exakte Übereinstimmung in Anbetracht der Ungenauigkeiten für das Weltalter  $t_0$  und dem Dichteverhältnis  $\rho_0/\rho_c$  wohl eher zufällig. Auf der anderen Seite ergeben sich bei Berücksichtigung dieser Ungenauigkeiten aus 2.5.6 Werte zwischen  $69.5 - 70 \text{ km/sMpc}$ , was sich nicht nur innerhalb der von W. Freedman angegebenen Genauigkeit für ihren Messwert bewegt, sondern im Verhältnis zu dem bisher für die Hubble-Konstante gemessenen Wertespektrums eine Übereinstimmung zeigt, die als signifikant angesehen werden muss.

Im Hinblick auf das Folgende ist dabei noch bemerkenswert, dass sich W. Freedman in ihrer Arbeit auf zwei Datenbestände für die Messung der SNe Ia bezieht, wobei der Wert  $69.8 \text{ km/sMpc}$  aus dem Datenbestand für den kleineren Rotverschiebungsbereich  $z < 0.08$  resultiert. Für den zweiten Datenbestand, der von ihr nur zur Prüfung ihrer neuen Messmethodik herangezogen wird und der mit  $z < 0.15$  einen fast doppelt so großen Rotverschiebungsbereich umfasst, ergibt sich für die Hubble-Konstante der etwas größere Wert  $70.1 \text{ km/sMpc}$ .

Dies korrespondiert mit der Entfernungsüberschätzung, die sich, wie wir im folgenden Kapitel 3 zeigen werden, mit zunehmender Rotverschiebung bei den Messverfahren zur Entfernungsbestimmung einstellt, worüber sich dann insbesondere die abweichenden Messungen für die Hubble-Konstante erklären lassen.

### 3 Konsequenzen für die Entfernungsbestimmung

Die Entfernungsbestimmung war und ist eine der größten Herausforderungen in der Astronomie. Für große Entfernungen versagen einfache Methoden wie die Parallaxenverschiebung, weshalb Bezugsgrößen, wie die Leuchtkraft der Standardkerzen benötigt werden, um diese mit ausreichender Genauigkeit bestimmen zu können.

Mithilfe moderner Technologien können heute die Entfernungen innerhalb unserer Milchstraße und zu den Nachbargalaxien der lokalen Gruppe mit einer nie dagewesenen Präzision bestimmt werden. Die Genauigkeit nimmt aber für größere Entfernungen deutlich ab, da mit Zunahme der Entfernung auch deren Abhängigkeit von der Ausdehnung des Raumes und damit vom betrachteten Expansionsmodell wächst.

Wie im letzten Kapitel gezeigt wurde, nimmt die Gravitation gemäß 2.3.3 und wegen  $A = 2\rho_c/\rho_0 > 2$  für die dichteunabhängige Expansionsdynamik mit dem Skalenfaktor der Raumausdehnung zu:

$$\tilde{G}(t) = G a(t)^{\frac{A-2}{A}} .$$

Dies bedeutet umgekehrt, dass die Gravitation mit zunehmender Entfernung der beobachteten astronomischen Objekte abnimmt. Dabei ist es plausibel, dass dies Auswirkungen auf die Entfernungsbestimmung hat, wenn die von den jeweiligen Messverfahren verwendeten Bezugsgrößen ursächlich von der geringeren Gravitation abhängen. Auf Grundlage sowohl spekulativer als auch theoretischer Überlegungen werden wir folgern, dass die Leuchtkraft der Supernovae und die Rotationsgeschwindigkeit der Galaxien eine Abnahme mit der Gravitation erfahren, aus der sich eine formal beschreibbare Überschätzung der über sie bestimmten Entfernungen ergibt.

Obwohl der gravitationsbedingten Entfernungsüberschätzung auch andere physikalische Phänomene, die als Bezugsgrößen genutzt werden, zu folgen scheinen, wie bspw. der Gravitationslinsen-Effekt, werden diese hier nicht näher untersucht, da die Vielzahl der existierenden Verfahren dies einfach nicht gestattet. Darüber hinaus existieren bis auf wenige Ausnahmen für die meisten astrophysikalischen Prozesse, die den Bezugsgrößen der Verfahren zugrunde liegen, so gut wie keine Kenntnisse hinsichtlich der Auswirkungen einer reduzierten Gravitation, weshalb sie für eine genauere Prüfung der Entfernungsüberschätzung ungeeignet wären.

Deshalb werden wir uns im Anschluss auf die Verfahren zur Bestimmung der großen Entfernungen beschränken und deren Abweichungen auf zwei für das heutige Verständnis des Universums wesentliche Beobachtungen anwenden: Die beschleunigte Expansion und die Messung des BAO Peak.

Zuvor müssen aber einige Begriffe im Zusammenhang mit der Beschreibung von Entfernungen in einem expandierenden Raum erläutert werden.



Ohne Ausdehnung des Raumes beträgt die Entfernung eines Objektes, dessen Licht wir zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  empfangen und das zum Zeitpunkt  $t' < t_0$  abgestrahlt wurde,  $c(t_0 - t')$ .

Aufgrund der Raumausdehnung legt das Licht aber für jedes Zeitintervall  $\Delta t$  in der Vergangenheit näherungsweise die Entfernung  $c \frac{1}{a} \Delta t > c \Delta t$  in Bezug auf die heutige Skalierung  $a(t_0) = 1$  zurück. Entsprechend erhalten wir durch Integration über die infinitesimalen  $\Delta t$  die physikalische Entfernung, die ein Objekt zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  von uns besitzt

$$D_p = c \int_{t'}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt . \quad (3.0.1)$$

Diese Entfernung wird als *Proper Distance* bezeichnet. Allgemein beschreibt die *Proper Distance* die physikalische Entfernung zweier Objekte relativ zur Skalierung  $a(t)$ . Entsprechend erhalten wir aus 3.0.1 bei fester Lichtlaufzeit  $(t_0 - t')$  die zeitliche Abhängigkeit

$$D_p(t) = a(t) D_p . \quad (3.0.2)$$

In Ermangelung eines adäquaten deutschen Begriffs werden wir im Folgenden einfach von der Distanz bzw. Distanz zum Zeitpunkt  $t$  sprechen.

Nach 3.0.1 ergeben sich die heutigen Distanzen aus der unterschiedlichen Lichtlaufzeit  $(t_0 - t')$ . Da diese aber nicht direkt gemessen werden kann, müssen die Distanzen in Abhängigkeit von der messbaren Rotverschiebung beschrieben werden. Aufgrund der Raumausdehnung besteht zwischen den Werten des Skalenfaktors  $a(t)$  und der Rotverschiebung  $z$  des von einem Objekt empfangenen Lichtes nach der ART der folgende Zusammenhang [9]

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} - 1 = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} - 1 ,$$

wobei  $\lambda_{obs}$  und  $\lambda_{em}$  die beobachtete bzw. ausgesendete Wellenlänge zu den jeweiligen Zeitpunkten  $t_{obs}$  und  $t_{em}$  bezeichnen. Für  $t = t_{em} < t_{obs} = t_0$  und  $a(t_0) = 1$  gilt demzufolge

$$a(t) = \frac{1}{1 + z} . \quad (3.0.3)$$

Dabei ist dieser relativistische Effekt der Raumausdehnung nicht mit dem Dopplereffekt zu verwechseln, der bei der Entdeckung der Galaxienflucht von Bedeutung war und auch ohne Raumausdehnung zu einer Rotverschiebung aufgrund der Relativbewegung zwischen dem Sender und dem Empfänger des Lichtsignals führt (siehe Kapitel 1). Allerdings nimmt der Anteil des Dopplereffekts an der Rotverschiebung mit zunehmender Entfernung ab, und ist für die Entfernungsbestimmung von Objekten im bereits erwähnten *Hubble Flow* jenseits von 100 *Mpc* vernachlässigbar.

Wir nutzen nun die zeitliche Abhängigkeit des Skalenfaktors gemäß 3.0.3 zur Beschreibung von  $z$  und erhalten darüber eine Abbildung  $Z : t \mapsto z$  mit

$$Z(t) = \frac{1}{a(t)} - 1 \Rightarrow \dot{Z}(t) = -\frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} \quad (3.0.4)$$

und folgern daraus mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\frac{d}{dz} Z^{-1}(z) = \frac{1}{\dot{Z}(Z^{-1}(z))} = -\frac{a^2(Z^{-1}(z))}{\dot{a}(Z^{-1}(z))}. \quad (3.0.5)$$

Mithilfe der Abbildung  $Z(t)$  lässt sich die von  $z$  abhängige Hubble-Funktion

$$H(z) = \frac{\dot{a}(Z^{-1}(z))}{a(Z^{-1}(z))} \quad \text{mit} \quad a(Z^{-1}(z)) = \frac{1}{1+z} \quad (3.0.6)$$

beschreiben, worüber wir schließlich nach 3.0.1 die folgende Darstellung für die von der Rotverschiebung  $z$  abhängige heutige Distanz erhalten

$$\begin{aligned} D(z) &= c \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' = c \int_0^z \frac{a(Z^{-1}(z'))}{\dot{a}(Z^{-1}(z'))} dz' \\ &= c \int_z^0 \frac{1}{a(Z^{-1}(z'))} \frac{d}{dz} Z^{-1}(z') dz' \\ &= c \int_{Z^{-1}(z)}^{Z^{-1}(0)} \frac{1}{a(t)} dt \\ &= c \int_{t'}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = D_p. \end{aligned} \quad (3.0.7)$$

Bei der Bestimmung großer Entfernungen aus Helligkeitsmessungen muss die Ausdünnung des Photonenflusses berücksichtigt werden. Dieser zusätzliche Effekt der Ausdehnung des Raumes, der durch das entsprechend verzögerte Eintreffen der Photonen verursacht wird, führt mit 3.0.3 auf die sogenannte Leuchtkraft-Distanz (engl. *Luminosity Distance*)

$$d_L(z) = (1+z)D(z). \quad (3.0.8)$$

Aus der 1. FG für  $k = 0$  (siehe 1.1.1 und 1.3.1) zusammen mit 3.0.6 ergeben sich für die konstante Gravitation die von der Rotverschiebung  $z$  abhängigen heutigen Distanzen nach 3.0.7 aus

$$D(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \left( \Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda \right)^{-1/2} dz'. \quad (3.0.9)$$

Da dieses Integral keine analytische Lösung besitzt, müssen dessen Werte in den folgenden Abschnitten numerisch bestimmt werden.

Für die von  $z$  abhängige Hubble-Funktion der dichteabhängigen Gravitation gilt nach 2.2.1 und 2.2.3

$$H(t) = H_0 a(t)^{-\frac{A+1}{A}} \quad \Rightarrow \quad H(z) = H_0 (1+z)^{\frac{A+1}{A}} ,$$

woraus wir für die von der Rotverschiebung  $z$  abhängigen Distanzen nach 3.0.7 die folgende analytische Darstellung erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{D}(z) &= \frac{c}{H_0} \int_0^z (1+z')^{-\frac{A+1}{A}} dz' = \frac{c}{H_0} \left( -A(1+z')^{-\frac{1}{A}} \right) \Big|_{z'=0}^{z'=z} \\ &= \frac{c}{H_0} A \left( 1 - (1+z)^{-\frac{1}{A}} \right) . \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

Im Anschluss werden wir alle Berechnungen mit dem  $2/A = \rho_0/\rho_c = 0.041$  (siehe 2.5.5) entsprechenden Parameterwert  $A \approx 48.8$  durchführen.

Für kleine Rotverschiebungen  $z$  erhalten wir aus 3.0.9 und 3.0.10 für die Distanzen unabhängig vom Expansionsmodell die Abschätzung

$$\frac{c}{H_0} z \approx z \cdot 14.4 \cdot 10^9 \text{ Lj} \approx z \cdot 4.40 \cdot 10^3 \text{ Mpc} . \quad (3.0.11)$$

Wie aber bereits erwähnt, werden wir im Folgenden ausschließlich weiter entfernte Objekte mit Distanzen von über  $100 \text{ Mpc}$  bzw. einer Rotverschiebung von  $z > 0.03$  betrachten, für deren Entfernungsbestimmung die vom Expansionsmodell abhängige Raumausdehnung zunehmend an Bedeutung gewinnt.

### 3.1 Die scheinbar beschleunigte Expansion

Im Jahr 1998 wurden im Rahmen des *Supernova Cosmology Project* die Messergebnisse veröffentlicht für die Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt und Adam Riess 2011 der Nobelpreis verliehen wurde [8]. Ihre Beobachtungen weit entfernter Supernovae vom Typ Ia (SNe Ia) gelten seither als Beleg, dass die Expansion des heutigen Universums beschleunigt ist.

Die Abbildung 3.1 zeigt die aktualisierten Messdaten des Projekts, bei der die gemessenen bolometrischen Helligkeiten  $m_B$  der Supernovae gegen ihre Rotverschiebungen  $z$  aufgetragen sind.

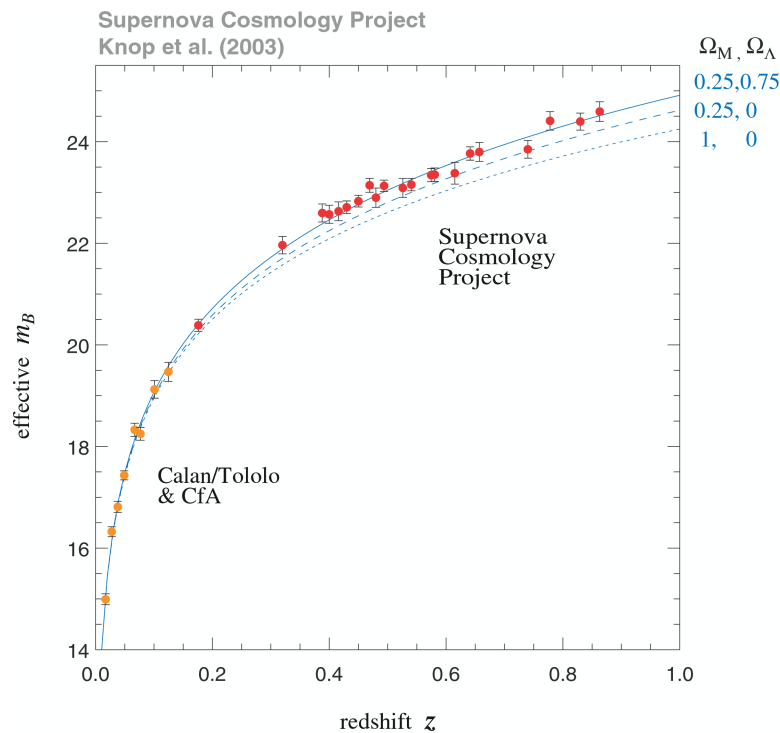


Abbildung 3.1: Messung der SNe Ia zur beschleunigten Expansion  
(Abbildung aus *Supernova Cosmology Project* [7])

Die Helligkeit eines beobachteten Objektes ist abhängig von der Entfernung und der Strahlungsleistung, die als Leuchtkraft  $L$  bezeichnet wird. Dabei wird die Strahlung gleichmäßig in alle Richtungen des Raumes abgegeben, so dass man in der Entfernung  $r$  die Energieflussdichte  $L/4\pi r^2$  erhält, über die man die Helligkeit

$$m = -2.5 \cdot \log \left( \frac{L}{4\pi r^2} \right) \quad (3.1.1)$$

definiert, die in Magnituden (mag) angegeben wird und deren Wert mit Abnahme der Helligkeit zunimmt.

Ist die Leuchtkraft  $L$  eines Objektes bekannt, kann dessen Helligkeit  $M$  für die Bezugsentfernung  $10 \text{ pc}$  berechnet werden, die als absolute Helligkeit bezeichnet wird. Darüber kann mithilfe des sogenannten Entfernungsmoduls

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{L/4\pi r^2}{L/4\pi(10 \text{ pc})^2} \right) \\ &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{(10 \text{ pc})^2}{r^2} \right) \\ &= 5 \cdot \log \left( \frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

aus der beobachteten Helligkeit  $m$  eines Objektes auf dessen Entfernung  $r$  geschlossen werden. Wie bereits erwähnt, muss bei der Bestimmung von größeren Entfernungen die Ausdehnung des Raumes berücksichtigt werden. Entsprechend hängen die Helligkeiten

$$m_z = 5 \cdot \log \left( \frac{d_L(z)}{10 \text{ pc}} \right) + M \quad (3.1.3)$$

über die unter 3.0.8 beschriebenen Leuchtkraft-Distanzen  $r = d_L(z)$  auch vom betrachteten Expansionsmodell ab.

In der Abbildung 3.1 sind die sogenannten effektiven Helligkeiten dargestellt, die unabhängig von der Hubble-Konstanten  $H_0$  sind (siehe [8], Seite 4). Die Messungen des *Supernova Cosmology Project* sind demzufolge so zu interpretieren, dass die Helligkeiten der weit entfernten Supernovae nur durch eine beschleunigte Expansion mit einem 75%-igen Anteil dunkler Energie an der Energiedichte des Universums ( $\Omega_\Lambda = 0.75$ ) erklärt werden kann (siehe 1.3.3)

$$q_0 = \frac{1}{2} \cdot 0.25 - 0.75 < 0 .$$

Wir werden nun die Messungen des *Supernova Cosmology Project* für die dichteabhängige Gravitation neu interpretieren. Dafür werden wir uns am Kurvenverlauf der beschleunigten Expansion mit den Dichteparametern  $\Omega_M = 0.25$  und  $\Omega_\Lambda = 0.75$  orientieren, der, wie die Abbildung 3.1 zeigt, eine gute Übereinstimmung mit den Messdaten besitzt.

Ohne weitere Annahmen erhalten wir analog zu 3.1.3 für die Expansion der dichteabhängigen Gravitation die Helligkeiten

$$\tilde{m}_z = 5 \cdot \log \left( \frac{\tilde{d}_L(z)}{10 \text{ pc}} \right) + M , \quad (3.1.4)$$

wobei mit  $\tilde{d}_L(z) = (1+z)\tilde{D}(z)$  die Leuchtkraft-Distanz zu der spezifischen Raumausdehnung dieses Expansionsmodells bezeichnet wird (siehe 3.0.10), die wegen der betrachteten effektiven Helligkeiten auf demselben Wert für die Hubble-Konstante  $H_0$  wie die Leuchtkraft-Distanz  $d_L(z)$  beruht.

In der Abbildung 3.1 hätte die Kurve für die Helligkeiten  $\tilde{m}_z$  ungefähr den Verlauf der gebremsten Expansion mit  $\Omega_M = 0.25$ .

Um die Abweichungen zur Kurve der beschleunigten Expansion zu erklären, gehen wir, wie eingangs dieses Kapitels erläutert, davon aus, dass diese aus den mutmaßlich überschätzten Entfernungen resultieren, die sich wegen der mit der Gravitation abnehmenden Leuchtkraft der SNe Ia einstellen.

Nach 2.3.3 zusammen mit  $a(Z^{-1}(z)) = 1/(1+z)$  (siehe 3.0.6) gilt für die von der Rotverschiebung  $z$  abhängige Gravitation

$$\tilde{G}_z = \tilde{G}(Z^{-1}(z)) = Ga(Z^{-1}(z))^{\frac{A-2}{A}} = G \left( \frac{1}{1+z} \right)^{\frac{A-2}{A}}. \quad (3.1.5)$$

Bezeichne  $L_0$  die angenommene und  $L_z < L_0$  die abnehmende Leuchtkraft. Ausgehend von der rein spekulativen Gravitation-Leuchtkraft Relation für die SNe Ia

$$\frac{L_z}{L_0} = \sqrt{\frac{\tilde{G}_z}{G}} \quad (3.1.6)$$

erhalten wir damit aus 3.1.1 für die Helligkeitsdifferenzen die Darstellung

$$\begin{aligned} \Delta m_z = m_z - \tilde{m}_z &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{L_0}{4\pi d_L(z)^2} \right) + 2.5 \cdot \log \left( \frac{L_z}{4\pi \tilde{d}_L(z)^2} \right) \\ &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{L_0}{L_z} \left( \frac{\tilde{d}_L(z)}{d_L(z)} \right)^2 \right) \\ &= -2.5 \cdot \log \left( \left( \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} \right)^2 / \sqrt{\frac{\tilde{G}_z}{G}} \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Dabei ist nicht davon auszugehen, dass die Relation für die abweichenden Distanzen zwischen den beiden Expansionsmodellen mit der abnehmenden Gravitation korrespondiert, so dass für die Helligkeitsdifferenzen allgemein  $\Delta m_z \neq 0$  gilt. Wir werden aber zeigen, dass sich die Helligkeitsdifferenzen im Rahmen der Messgenauigkeit für die SNe Ia bewegen.

Zur Bestimmung der Werte für die relativen Abweichungen der Distanzen (siehe 3.0.9 und 3.0.10)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} &= \frac{\frac{c}{H_0} \tilde{I}(z)}{\frac{c}{H_0} I(z)} = \frac{\tilde{I}(z)}{I(z)} \quad \text{mit} \\ \tilde{I}(z) &= \int_0^z (1+z')^{-49.8/48.8} dz' \\ I(z) &= \int_0^z \left( 0.25 (1+z')^3 + 0.75 \right)^{-1/2} dz' \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

wurden die Integrale für die Dichteparameter  $\Omega_M = 0.25$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.75$  sowie dem Wert  $A = 48.8$  numerisch berechnet, da insbesondere das Integral  $I(z)$  keine analytische Lösung besitzt.

In der Tabelle 3.1 sind für einige  $z$ -Werte die Helligkeitsdifferenzen 3.1.7, die sich gemäß 3.1.5 aus der Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 ergeben, den prozentualen Abweichungen für die Gravitation und der Leuchtkraft gegenübergestellt:

$z$	$\tilde{G}_z/G$ (%)	$L_z/L$ (%)	$\Delta m_z$
0.01	99.1	99.5	0.002
0.03	97.2	98.6	0.005
0.05	95.4	97.7	0.008
0.1	91.3	95.6	0.015
0.3	77.8	88.2	0.026
0.5	67.8	82.3	0.019
0.7	60.1	77.5	-0.001
1	51.4	71.7	-0.046
1.5	41.5	64.4	-0.140
2	34.9	59.1	-0.239

Tabelle 3.1: Helligkeitsdifferenzen  $\Delta m_z$   
für die Gravitation-Leuchtkraft Relation der SNe Ia

Für  $z < 1$  liegen die Helligkeitsdifferenzen  $\Delta m_z$  unter  $0.03 \text{ mag}$  und für  $z = 1$  noch immer über  $-0.05 \text{ mag}$ , was sich unter der in der Abbildung 3.1 dargestellten Messgenauigkeit für die Helligkeiten der Supernovae befindet. Damit wäre gezeigt, dass mit der Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 die Messdaten des *Supernova Cosmology Project* auch ohne dunkle Materie und dunkle Energie durch die dichteabhängige Gravitation erklärt werden können und die Expansion nur bei Annahme einer konstanten Gravitation bzw. Leuchtkraft der Supernovae beschleunigt erscheint.

Insbesondere liegt die Helligkeitsdifferenz für  $z < 0.08$  bei unter  $0.02 \text{ mag}$ , was sich innerhalb der von W. Freedman in [12] angegebenen Fehlertoleranz für die Entfernungen zur Bestimmung ihres Wertes für die Hubble-Konstante bewegt und damit die gute Übereinstimmung mit dem im letzten Kapitel 2.5 bestimmten Wert für die dichteabhängige Gravitation erklärt.

Für  $z > 1$  nehmen die Abweichungen der Helligkeiten zwar stark zu, bewegen sich aber immer noch innerhalb der in der Abbildung 3.1 angegebenen Genauigkeiten für die Helligkeiten der Supernovae, so dass sich Widersprüche zur beschleunigten Expansion erst ab  $z > 2$  einstellen würden. Da aber die Beobachtungsgrenze für die SNe Ia zur Zeit bei ungefähr  $z = 2$  liegt, sind über diese Messungen allein keine signifikanten Abweichungen zu erwarten. Die Abweichungen können nur über einen Vergleich mit den Entfernungen anderer Verfahren festgestellt werden. Im folgenden Abschnitt werden die Abweichungen bei der Entfernungsbestimmung von Galaxien abgeschätzt, dessen theoretisch ableitbare Gravitation-Leuchtkraft Relation insbesondere die hier rein spekulativ zu den Messdaten gewählte Relation plausibilisiert.

### 3.2 Abschätzung der spezifischen Abweichungen

In diesem Abschnitt werden die relativen Abweichungen der Distanzen für die aus der dichteabhängigen Gravitation resultierenden Expansion und der beschleunigten Expansion, die sich wegen der unterschiedlichen gravitativen Abhängigkeiten der Messverfahren zur Entfernungsbestimmung einstellen, formal abgeschätzt.

Betrachten wir zunächst die Abweichungen der Distanzen, die sich für die Messung der SNe Ia ergeben, indem wir diese aus den Helligkeitsdifferenzen  $\Delta m_z$  des letzten Abschnitts ableiten. Dabei resultieren die Abweichungen zum einen aus der unterschiedlichen Dynamik der Expansionsmodelle und zum anderen aus der gravitationsbedingten Überschätzung der Leuchtkraft. Dies sieht man durch formale Zerlegung der Helligkeitsdifferenz aus 3.1.7

$$\Delta m_z = (m_{L_0} - m_{L_z}) + (m_{L_z} - \tilde{m}_{L_z}) ,$$

wobei die Helligkeiten über die Leuchtkraft-Distanzen  $d_{L_0}$ ,  $d_{L_z}$ ,  $\tilde{d}_{L_z}$  zu der jeweils im Index angegebenen Leuchtkraft bestimmt sind.

Damit wird das aus  $\Delta m_z$  resultierende Verhältnis der Leuchtkraft-Distanzen  $\tilde{d}_{L_z}/d_{L_0}$  über die formal frei wählbare Leuchtkraft-Distanz  $d_{L_z}$  beschrieben. Dabei entspricht die 1-te Differenz den abweichenden Helligkeiten zweier Objekte mit unterschiedlicher Leuchtkraft  $L_0$  bzw.  $L_z$  in Abhängigkeit von den Leuchtkraft-Distanzen  $d_{L_0}$  bzw.  $d_{L_z}$  zu der beschleunigten Expansion. Wählen wir nun  $d_{L_z}$  so, dass diese Objekte dieselbe Helligkeit besitzen

$$\begin{aligned} m_{L_0} - m_{L_z} &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{L_0}{4\pi(d_{L_0})^2} \right) + 2.5 \cdot \log \left( \frac{L_z}{4\pi(d_{L_z})^2} \right) \\ &= -2.5 \cdot \log \left( \frac{L_0}{L_z} \left( \frac{d_{L_z}}{d_{L_0}} \right)^2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d_{L_z}}{d_{L_0}} &= \sqrt{\frac{L_z}{L_0}} , \end{aligned}$$

dann wird die Helligkeitsdifferenz  $\Delta m_z$  ausschließlich durch das Verhältnis der abweichenden Distanzen für die beiden Expansionsmodelle bestimmt

$$\Delta m_z = m_{L_z} - \tilde{m}_{L_z} = -2.5 \cdot \log \left( \left( \frac{\tilde{d}_{L_z}}{d_{L_z}} \right)^2 \right) = -2.5 \cdot \log \left( \left( \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} \right)^2 \right) .$$

Bezeichne  $\tilde{D}_{L_z} = \tilde{d}_{L_z}/(1+z)$  und  $D_{L_0} = d_{L_0}/(1+z)$  die Distanzen zu den Leuchtkraft-Distanzen (siehe 3.0.8), dann erhält man für diese Wahl der Leuchtkraft-Distanz  $d_{L_z}$  unter Berücksichtigung der Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 für deren relative Abweichung die Darstellung

$$\frac{\tilde{D}_{L_z}}{D_{L_0}} = \frac{\tilde{d}_{L_z}}{d_{L_0}} = \frac{d_{L_z}}{d_{L_0}} \frac{\tilde{d}_{L_z}}{d_{L_z}} = \sqrt{\frac{L_z}{L_0}} \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} = \left( \frac{\tilde{G}_z}{G} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} . \quad (3.2.1)$$



Die Relation der abweichenden Distanzen, die sich für dieses Verfahren zur Entfernungsbestimmung ergeben, basieren auf den Distanz-Relationen der beiden Expansionsmodelle, die über die Wurzel der relativen Abweichungen der Leuchtkraft gewichtet werden. Dabei wird durch diese Gewichtung die spezielle gravitative Abhängigkeit des Verfahrens, die über die Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 für deren Bezugsgröße gegeben ist, beschrieben. Um daraus eine allgemeine Beschreibung für die abweichenden Distanzen der Verfahren zur Entfernungsbestimmung abzuleiten, gehen wir wie bei der Gravitation-Leuchtkraft Relation davon aus, dass sich die gravitativen Abhängigkeiten der Bezugsgrößen für die jeweiligen Verfahren über einen spezifischen Exponenten  $\gamma$  der abnehmenden Gravitation in ausreichender Genauigkeit beschreiben lassen. Damit erhalten wir die entsprechend 3.2.1 verallgemeinerte Darstellung

$$\delta_\gamma(z) = \left( \frac{\tilde{G}_z}{G} \right)^\gamma \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)} \quad (3.2.2)$$

für die durch  $\gamma$  beschriebenen verfahrensspezifischen Abweichungen bei der Messung der Distanzen, die wir im Folgenden als effektive Distanz-Relation bezeichnen werden.

Insbesondere lässt sich mithilfe dieser Parametrisierung die Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 für die SNe Ia genauer untersuchen. Dafür sind in der Tabelle 3.2 den bereits in der Tabelle 3.1 aufgeführten  $\Delta m_z$  für  $\gamma = 1/4$  die Helligkeitsdifferenzen weiterer Parameterwerte von  $\gamma$  gegenübergestellt.

z	$\Delta m_z$				
	$\gamma = 0$	$\gamma = 1/8$	$\gamma = 1/6$	$\gamma = 1/4$	$\gamma = 1/2$
0.01	0.007	0.005	0.004	0.002	-0.003
0.03	0.021	0.013	0.010	0.005	-0.010
0.05	0.034	0.021	0.017	0.008	-0.018
0.1	0.064	0.039	0.031	0.015	-0.035
0.3	0.163	0.094	0.072	0.026	-0.110
0.5	0.230	0.125	0.089	0.019	-0.192
0.7	0.275	0.137	0.091	-0.001	-0.277
1	0.315	0.135	0.074	-0.046	-0.407
1.5	0.338	0.099	0.019	-0.140	-0.617
2	0.333	0.047	-0.049	-0.239	-0.811

Tabelle 3.2: Helligkeitsdifferenzen  $\Delta m_z$   
für verschiedene Abhängigkeiten von der Gravitation

Für  $\gamma = 0$  besitzt gemäß 3.2.2 die Leuchtkraft überhaupt keine Abhängigkeit von der Gravitation, weshalb die Helligkeitsdifferenzen  $\Delta m_z$  nach 3.1.7 nur durch die Distanz-Relationen  $\tilde{D}(z)/D(z)$  für die beiden Expansionsmodelle bestimmt werden.

Betrachten wir in der Abbildung 3.2 die Entwicklung von  $D(z)$  und  $\tilde{D}(z)$ , dann korrespondieren deren Kurvenverläufe zunächst mit der zunehmenden Entfernungsüberschätzung, die sich wegen der gravitativen Abhängigkeiten der Messverfahren einstellt, nehmen aber jenseits der messbaren Distanzen eine gegenläufige Entwicklung.

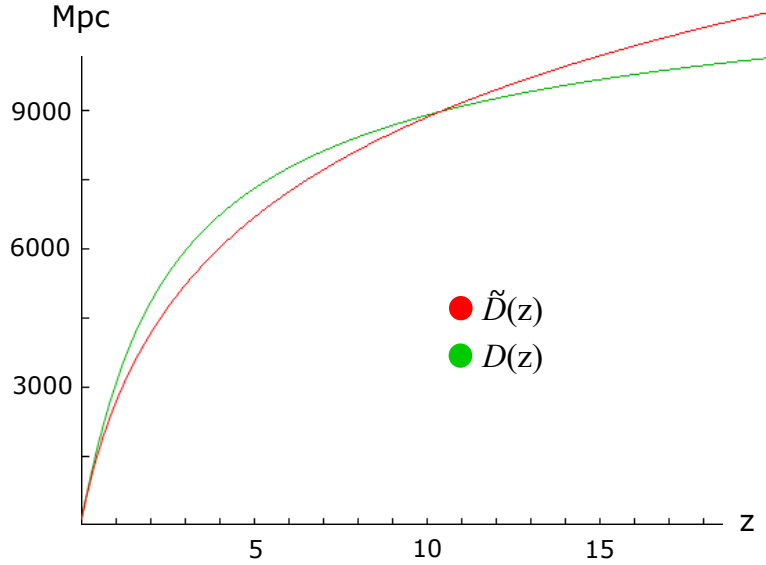


Abbildung 3.2: Entwicklung der Distanzen  $\tilde{D}(z)$  und  $D(z)$

Entsprechend werden mit Zunahme der durch  $\gamma$  beschriebenen gravitativen Abhängigkeit die Rotverschiebungen  $z$  mit  $\Delta m_z = 0$  für die Schnittpunkte der Helligkeitskurven, wie auch die Tabelle 3.2 zeigt, immer kleiner.

Aus diesem Grund können wir für eine bestmögliche Übereinstimmung mit den gemessenen Helligkeiten der SNe Ia zunächst  $1/8 < \gamma < 1/2$  annehmen. Für  $\gamma = 1/4$  sind die Helligkeitsdifferenzen im Rotverschiebungsbereich  $z \leq 1$  minimal, nehmen aber dafür im Bereich  $z > 1$  deutlich zu. Für  $\gamma = 1/6$  hingegen zeigen die Helligkeiten im betrachteten Rotverschiebungsbereich eine konstant gute Übereinstimmung, wobei sie dafür im Bereich  $z \approx 0.7$  deutlich schlechter ausfallen als für  $\gamma = 1/4$ . Dies zeigt, dass der für die Gravitation-Leuchtkraft Relation 3.1.6 zunächst verwendete Wert  $\gamma = 1/4$  möglicherweise eine zu starke Abhängigkeit von der Gravitation beschreibt, weshalb wir diese für das Folgende eher bei  $\gamma \approx 1/6$  annehmen. Für eine bessere Bestimmung von  $\gamma$  wäre eine umfangreiche Analyse der Messdaten erforderlich. Sollten diese aber nicht wesentlich genauer sein als in der Abbildung 3.1 dargestellt, wäre der Wert für  $\gamma$  zur Beschreibung der gravitativen Abhängigkeit bei der Entfernungsbestimmung durch die SNe Ia kaum besser als mit einer Genauigkeit von 10% zu bestimmen.

Neben den SNe Ia verfügen nur noch Galaxien über eine ausreichende Leuchtkraft, um in Distanzen von mehr als 100  $Mpc$  mit der notwendigen Genauigkeit für die Entfernungsbestimmung beobachtet werden zu können. Als Bezugsgröße dient dabei die Rotationsgeschwindigkeit die Rückschlüsse auf die Leuchtkraft der Galaxien zulässt, woraus sich dann analog zu den SNe Ia mithilfe des Entfernungsmoduls 3.1.2 deren Distanz bestimmen lässt. Eine der Grundlagen dieser Verfahren ist die Tully-Fisher Relation, die unter bestimmten Voraussetzungen den Zusammenhang

$$L \sim W^4$$

für die Rotationsrate  $W$  und die Leuchtkraft  $L$  der Galaxien postuliert [19]. Da die Tully-Fisher Relation den Virialsatz [20] als theoretische Grundlage besitzt, können wir aus der sich dort ergebenden Proportionalität  $W^2 \sim G$  schließlich  $\sqrt{L} \sim G$  folgern, woraus sich nach 3.2.1 für die effektiven Distanz-Relationen  $\delta_\gamma(z)$  aus 3.2.2 der Parameterwert  $\gamma = 1$  ergibt.

Dabei erscheint es durchaus plausibel, dass die Rotationsgeschwindigkeit als Bezugsgröße dieser Verfahren eine deutlich stärkere Abhängigkeit von der Gravitation aufweist, da diese Bezugsgröße im Gegensatz zur Leuchtkraft der thermonuklearen Explosion der SNe Ia aus einem vergleichsweise stabilen Zustand hervorgeht, der entsprechend sensibler auf gravitative Änderungen reagieren sollte. Aufgrund der stärkeren gravitativen Abhängigkeit sind die effektiven Distanz-Relationen für diese Verfahren entsprechend kleiner.

In der Tabelle 3.3 sind die effektiven Distanz-Relationen  $\delta_\gamma(z)$  zwischen den beiden Modellen mit identischer Expansionsrate zum Parameterwert  $\gamma = 1$  denen für  $\gamma = 1/6$ , die wir für die gravitative Abhängigkeit der Leuchtkraft der SNe Ia annehmen, gegenübergestellt.

z	$\delta_\gamma(z)$		
	$\gamma = 0$	$\gamma = 1/6$	$\gamma = 1$
0.01	0.9968	0.9965	0.9878
0.03	0.9906	0.9898	0.9629
0.05	0.9847	0.9835	0.9394
0.1	0.9709	0.9687	0.8864
0.3	0.9279	0.9242	0.7219
0.45	0.9055	0.9025	0.6339
0.6	0.8892	0.8878	0.5664
0.7	0.8809	0.8810	0.5294
1	0.8649	0.8710	0.4446

Tabelle 3.3: Effektive Distanz-Relationen zur beschleunigten Expansion mit den Dichteparametern  $\Omega_M = 0.25$  und  $\Omega_\Lambda = 0.75$

Wie die Tabelle 3.3 zeigt, nimmt die Überschätzung der Distanzen mit der Rotverschiebung  $z$  und der gravitativen Abhängigkeit  $\gamma$  zu. Dabei ist für die kleineren Distanzen von weniger als 100  $Mpc$  bzw.  $z < 0.03$  (siehe 3.0.11) die Gravitation um weniger als 3% reduziert (siehe Tabelle 3.1), weshalb bei vergleichenden Messungen zwischen den gravitationsabhängigen Verfahren mit  $\gamma = 1$  und den Verfahren ohne eine Abhängigkeit von der Gravitation in diesen Entfernungen kaum offensichtliche Widersprüche zu erwarten sind, da deren Messungengenauigkeiten kaum besser als 2% sind.

Im Rahmen des SDSS-III (*Sloan Digital Sky Survey III* [21]) wurden über Jahre die Distanzen von ca. einer Million Galaxien aus den Messungen ihrer Rotationsgeschwindigkeit bestimmt, wofür eine Vielzahl von Messverfahren verwendet wurden, deren unterschiedliche  $\gamma$ -wertige Abhängigkeit hier nicht im Einzelnen untersucht werden kann. Im Abschnitt 3.4 werden wir aber eine Verwendung dieser Datenbasis vorstellen, die Grund zu der Annahme gibt, dass deren Abhängigkeit nicht wesentlich von  $\gamma = 1$  abweicht.

Allerdings zeigt die Tabelle 3.3, dass die effektiven Distanz-Relationen für diese Verfahren bei den großen Rotverschiebungen deutliche von denen der SNe Ia mit  $\gamma \approx 1/6$  abweichen. Dies hat zur Konsequenz, dass die Distanzen der SNe Ia geringer als die ihrer Galaxien bestimmt werden müssten. Unter Berücksichtigung des seltenen und unvorhersehbaren Auftretens der SNe Ia und der völlig andersartigen Messtechnik für die Entfernungsbestimmung der Galaxien scheint es nicht unwahrscheinlich, dass solche vergleichenden Messungen, wenn überhaupt, nur vereinzelt für die größeren Rotverschiebungen vorgenommen wurden und die dabei aufgetretenen Abweichungen in Ermangelung einer theoretischen Erklärung auf praktische Probleme der Messmethodik zurückgeführt wurden.

Wie auch immer bieten die vergleichenden Messungen eine Möglichkeit die postulierte gravitative Abhängigkeit für die Leuchtkraft der SNe Ia und der Galaxien zu überprüfen.

Möglicherweise zeigen auch andere Verfahren mit einer deutlich größeren Abhängigkeit von der Gravitation bereits für die kleinen Rotverschiebungen messbare Abweichungen. Beispielsweise sollten die pulsationsveränderlichen Sterne bzw. die zur Entfernungsbestimmung genutzte Pulsationsrate äußerst sensibel auf eine geringere Gravitation reagieren.

Wie aber bereits zu Beginn des Kapitels erläutert, wollen wir auf eine nähere Untersuchung der Abweichungen für die kleineren Entfernungen verzichten.

Ohne dies genauer zu erläutern, bieten die Entfernungsüberschätzungen eine Erklärung für die größeren Messwerte der Hubble-Konstanten, die auf Grundlage dieser Messverfahren bestimmt wurden.

Die kleineren Messwerte für die Hubble-Konstante dagegen lassen sich aus der unterschätzten Entfernung zur Hintergrundstrahlung erklären, worauf wir im folgenden Abschnitt eingehen werden.

### 3.3 Entfernung der Hintergrundstrahlung

Im Gegensatz zu den im letzten Abschnitt betrachteten Distanzen wird die Distanz zur Hintergrundstrahlung nicht über Helligkeitsmessungen, sondern über eine andere Bezugsgröße, den sogenannten *Sound Horizon*, bestimmt. Dessen Länge ergibt sich aus der *Baryonic Acoustic Oscillation* (BAO) unter Annahme der Inflationstheorie, wobei die zugrundeliegenden Berechnungen ganz wesentlich auf der konstanten Gravitation beruhen.

Für die dichteabhängige Gravitation werden wir in diesem Abschnitt eine alternative Interpretation für diese Beobachtung der Hintergrundstrahlung anbieten, die ohne die spekulative Inflationstheorie auskommt, wofür wir aber zunächst die dafür benötigten Zusammenhänge vorstellen müssen.

Die Abbildung 3.3 zeigt die Karte der *Planck Mission* aus dem Jahr 2013, die mit einer Auflösung von 5-10 Winkelminuten die zur Zeit genaueste Darstellung der als Anisotropien bezeichneten Temperaturschwankungen in der Hintergrundstrahlung bietet [18].

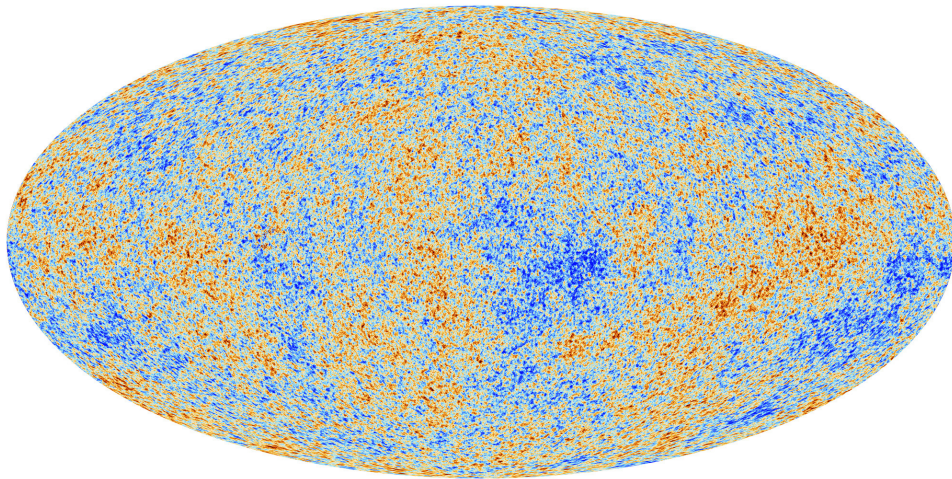


Abbildung 3.3: Anisotropien der kosmischen Hintergrundstrahlung  
(Abbildung von ESA [18])

Dabei ist die Temperatur von ungefähr 2.725 Kelvin in der Hintergrundstrahlung äußerst homogen verteilt, da sich die farblich hervorgehobenen Abweichungen zwischen den warmen (roten) und kalten (blauen) Gebieten erst bei weniger als einem tausendstel Grad einstellen.

Wegen der Gravitation müssten die Temperaturunterschiede aber deutlich ausgeprägter sein, weshalb der Inflationstheorie zufolge, die Expansion des Universums zu Beginn so stark beschleunigt war, dass sich die anfänglich aus Quantenfluktuationen gebildeten schwachen Inhomogenitäten durch die Gravitation nicht wesentlich verstärken konnten.

Am Ende dieser nur den Bruchteil einer Sekunde währenden Inflationsphase war die Temperatur im Universum immer noch so groß, dass die Elektronen nicht von den Atomkernen eingefangen werden konnten. Dadurch wurden die Photonen der Strahlung aufgrund ihrer Wechselwirkung mit den freien Elektronen an die baryonische Materie gebunden.

Die Zustandsbeschreibung für dieses relativistische Baryonen-Photonen Gas lautet (siehe auch 1.1.7)

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 . \quad (3.3.1)$$

Aufgrund der eben erwähnten inhomogenen Dichteverteilung wirkt nun die Gravitation der dichteren Gebiete auf die Baryonen, weshalb sich das Gas dort weiter zusammenzieht. Dadurch nimmt der Strahlungsdruck wegen der im Gas gebundenen Photonen in diesen Gebieten zu, bis dieser schließlich die Gravitation übersteigt, wodurch das Gas wieder auseinandergedrückt wird und der Prozess wieder von vorne beginnt.

Die durch diese Oszillation des Baryonen-Photonen Gases hervorgerufenen Dichtewellen breiten sich vergleichbar mit akustischen Wellen abhängig von der Dichte  $\rho$  und dem Druck  $p$  aus (siehe [16]). Entsprechend gilt für die Geschwindigkeit der Dichtewellen mit 3.3.1 und  $d\rho/\rho = -dV/V$  (siehe [14])

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \frac{c}{\sqrt{3}} . \quad (3.3.2)$$

Die Längen dieser Dichtewellen sind durch die Lichtgeschwindigkeit bzw. durch die Strecke, die ein Photon seit Beginn der Oszillation zurücklegen konnte, begrenzt. Wie in der Akustik führt eine Begrenzung der Wellenausbreitung zu stehenden Wellen verschiedener Frequenzen.

Dabei besitzt die Welle mit der Fundamentalfrequenz der Grundschiwingung die maximale Länge und hat zum Zeitpunkt  $t$  eine halbe Periode durchlaufen [15]. Die maximale Wellenlänge wird in diesem Kontext als *Sound Horizon* bezeichnet und beträgt demzufolge <sup>9</sup>

$$\lambda_t = 2c_s t = \frac{2ct}{\sqrt{3}} . \quad (3.3.3)$$

Die höher frequenten Schwingungen können dabei nur dann verstärkend mit der Fundamentalfrequenz interferieren, wenn sie phasengleich sind und die Wellenlängen  $\lambda = \lambda_t/n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) besitzen, wohingegen sich die anderen Schwingungen in ihrer Gesamtheit aufheben.

---

<sup>9</sup>Unter Berücksichtigung der Raumausdehnung, die wir bei der Darstellung der BAO vernachlässigt haben, kann die Distanz  $2ct/\sqrt{3} \approx 1.15 \cdot ct$  von einem Photon in der Zeit  $t$  zurückgelegt werden.

Mit der fortschreitenden Abkühlung des Universums bricht die Oszillation des Baryonen-Photonen Gases schließlich ab, da die Elektronen nicht mehr die erforderliche Energie besitzen, um sich der Bindung an die Atomkerne weiter zu entziehen.

Zu dieser Zeit, die aus historischen Gründen als Rekombination bezeichnet wird, werden die Temperaturunterschiede der unterschiedlich schwingenden Gebiete durch Abstrahlung der frei gewordenen Photonen der Hintergrundstrahlung als Anisotropien aufgeprägt. Der Durchmesser der Anisotropien entspricht der halben Wellenlänge der Schwingungen, deren Amplituden sich mit zunehmender Frequenz, wie in der Akustik, von der Grundschwingung zu den Oberschwingungen verringern bis diese ab einer bestimmten Frequenz durch verschiedene physikalische Effekte, die wir hier nicht näher erläutern wollen, schließlich vollständig verschwinden.

Aus diesem Grund wird in der Hintergrundstrahlung das Leistungsspektrum der Temperaturschwankungen, wie in der Abbildung 3.4 dargestellt, durch die Anisotropien der Fundamentalfrequenz dominiert, deren Durchmesser der Hälfte des *Sound Horizon* zum Zeitpunkt der Rekombination entspricht.

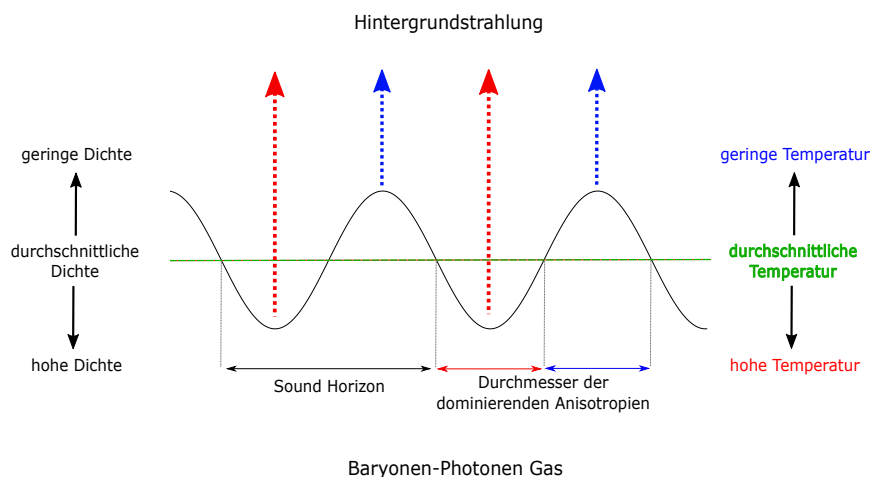


Abbildung 3.4: Schwingung der Fundamentalfrequenz

Mithilfe der als *First Acoustic Peak* der Hintergrundstrahlung gemessenen Dominanz der Fundamentalfrequenz lässt sich über den *multipole moment*, auf den wir hier nicht näher eingehen wollen, der Winkeldurchmesser  $\Theta$  (engl. *angular scale*) für den *Sound Horizon* sehr genau bestimmen [17].

Bei Annahme der Inflationstheorie kann der Zeitpunkt der Rekombination durch theoretische Berechnungen ziemlich genau auf 380.000 Jahre festgelegt werden. Zur Unterscheidung von der Dauer der Strahlungs-Ära  $t_r$ , die bereits nach 300.000 Jahren beendet war (siehe Abschnitt 1.2), wollen wir diesen Zeitpunkt mit  $\hat{t}_r$  bezeichnen.

Damit ergibt sich nach 3.3.3 für die Länge des *Sound Horizon* zum Zeitpunkt der Rekombination  $\hat{t}_r$  der Wert

$$r_s = \lambda_{\hat{t}_r} = \frac{2c\hat{t}_r}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 380.000 \text{ Lj}}{\sqrt{3}} \approx 440.000 \text{ Lj} \approx 135 \text{ Kpc} . \quad (3.3.4)$$

Aufgrund elementarer Geometrie steht die Länge des *Sound Horizon*  $r_s$  und der radiale Wert ihres Winkeldurchmessers  $\Theta$  im folgenden Verhältnis<sup>10</sup> zur Distanz der Hintergrundstrahlung  $d_A$

$$\Theta = \frac{r_s}{d_A} . \quad (3.3.5)$$

Dabei muss aber, um die Winkeltreue zu bewahren, die Raumausdehnung eliminiert werden, weshalb sich die Entfernung  $d_A$ , die aus diesem Grund als Winkeldurchmesser-Distanz (*Angular Diameter Distance*) bezeichnet wird, auf die Skalierung  $a(\hat{t}_r) = 1/(1 + z_r)$  zum Zeitpunkt des Aussendens der Hintergrundstrahlung bzw. deren Rotverschiebung  $z_r$  beziehen muss (siehe 3.0.2 und 3.0.7)

$$d_A = D_p(\hat{t}_r) = a(\hat{t}_r)D_p = \frac{1}{1 + z_r} D(z_r) . \quad (3.3.6)$$

Hieraus lässt sich zusammen mit 3.3.5 für die gemessene Rotverschiebung der Hintergrundstrahlung  $z_r = 1100$  nach Wahl geeigneter Dichteparameter in 3.0.9 der Wert für die Hubble-Konstante  $H_0$  bestimmen (siehe Anhang).

Zum Ende des letzten Abschnitts wurde in der Abbildung 3.2 gezeigt, dass bei Evidenz der dichteabhängigen Gravitation die Entfernungen für die großen Rotverschiebungen unterschätzt werden. Insbesondere ergibt sich für das Verhältnis der unterschiedlichen Distanzen zur Hintergrundstrahlung durch numerische Berechnung der Integrale aus 3.1.8

$$\frac{\tilde{D}(z_r)}{D(z_r)} = \frac{\tilde{I}(1100)}{I(1100)} = \frac{6.53}{3.44} \approx 1.9 . \quad (3.3.7)$$

Die Winkeldurchmesser-Distanz zur Hintergrundstrahlung  $\tilde{d}_A$  wäre demnach fast doppelt so groß als bisher angenommen, was wegen 3.3.5 und 3.3.6 aber unvereinbar mit den Messwerten für die Hubble-Konstante wäre. Allerdings resultiert dabei der Wert für den *Sound Horizon*  $r_s$  nach 3.3.4 aus der höchst spekulativen Inflationstheorie, deren postulierte nur für den Bruchteil einer Sekunde andauernde explosionsartige Raumausdehnung die Oszillation des Baryonen-Photonen Gases nahezu über den gesamte Zeitraum vom Urknall bis zur Rekombination ermöglicht.

<sup>10</sup>In der Gleichung entspricht  $r_s$  dem Bogenmaß des Kreisabschnitts unter dem Winkel  $\Theta$ , der für kleine Winkel nahezu mit der Länge der Sekante durch diesen Kreisabschnitt übereinstimmt, die eigentlich durch  $r_s$  beschrieben wird.



Dabei liefert die Inflationstheorie vergleichbar mit der dunklen Materie und der dunklen Energie keine physikalische Begründung für die Annahme ihrer Evidenz, sondern rechtfertigt diese ausschließlich durch die folgenden sonst nicht erklärbaren Beobachtungen der Hintergrundstrahlung [25]<sup>11</sup> :

- a) **Flachheitsproblem:** Messungen der Hintergrundstrahlung ergeben, dass auch das frühe Universum ungekrümmt (flach) gewesen sein muss, was ein extrem abgestimmtes Verhältnis zwischen der Dichte und der kinetischen Expansionsenergie erfordert hätte.
- b) **Horizontproblem:** Die räumliche Isotropie der Hintergrundstrahlung ist wegen der geringen Größe der im kausalen Zusammenhang stehenden Gebiete, die sich aufgrund der begrenzten Lichtgeschwindigkeit aus der kurzen Dauer bis zur Rekombination ergibt, nicht erklärbar.

Beide Probleme resultieren mehr oder weniger direkt aus der Annahme einer zu dieser Zeit unveränderten Gravitationswirkung. Für die dichteabhängige Gravitation existiert das Flachheitsproblem nach Abschnitt 2.3 überhaupt nicht und bei Berücksichtigung der ungefähr 50 mal längeren Strahlungs-Ära (siehe Abschnitt 2.4) wäre auch das Horizontproblem prinzipiell erklärbar. Darüber hinaus erklärt die in dieser Expansionsphase deutlich geringere Gravitation, deren Maximum bis zum Zeitpunkt der Rekombination mit  $a(\hat{t}_r) = 1/(1 + z_r) \approx 1/1000$  gemäß 2.3.3 nur ungefähr ein tausendstel der heutigen Gravitation betragen hat, die schwache Oszillation des Baryonen-Photonen Gases, die im Standardmodell wiederum auf die dunkle Materie zurückgeführt wird [23].

Bei Evidenz der dichteabhängigen Gravitation wäre also keine inflationäre Phase erforderlich und die Oszillation des Baryonen-Photonen Gases könnte wegen der zu Beginn kaum vorhandenen Gravitation zu einem viel späteren Zeitpunkt begonnen und trotzdem länger angedauert haben, wodurch sich nach 3.3.4 die Länge des *Sound Horizon* entsprechend vergrößern würde. Ob die dichteabhängige Gravitation übereinstimmend mit den Beobachtungen der Hintergrundstrahlung tatsächlich eine Dauer von ca. 760.000 Jahren für die Oszillation des Baryonen-Photonen Gases und damit ein Wert von ungefähr  $2r_s$  für den *Sound Horizon* erklärt, kann aufgrund der Komplexität der dafür erforderlichen Berechnungen hier nicht beantwortet werden. Dies würde aber insbesondere die vom Wert 2.5.1 abweichenden Messungen für die Hubble-Konstante, die auf der Hintergrundstrahlung basieren, erklären. Abschließend soll aber zur Untermauerung dieser spekulativen Annahme die Konsistenz der diametral abweichenden Distanzen für die kleinen und großen Rotverschiebungen durch deren gemeinsame Anwendung auf die Messung des BAO Peaks aufgezeigt werden.

---

<sup>11</sup>Das spekulative Monopole-Problem, das üblicherweise im Zusammenhang mit der Inflationstheorie Erwähnung findet, lässt sich nicht ohne weiteres mit der dichteabhängigen Gravitation erklären.

### 3.4 Anwendung auf die Messung des BAO Peak

Die im letzten Abschnitt vorgestellte BAO Theorie ist für das heutige Bild des Universums von grundlegender Bedeutung, da sie eine Erklärung für die als Anisotropien bezeichneten Temperatur-Fluktuationen in der kosmischen Hintergrundstrahlung liefert, die in der Masseverteilung des Universums als sogenannter BAO Peak nachgewiesen werden kann.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich die dazu zunächst im Widerspruch stehenden Abweichungen der Distanzen über eine alternative Interpretation der Messungen des BAO Peaks mit den Beobachtungen vereinbaren lassen.

Der BAO Peak hat sich, wie bereits erwähnt, aus den Anisotropien der Hintergrundstrahlung bzw. der inhomogenen Masseverteilung im Universum gebildet, wobei diese Entwicklung ausschließlich durch die Gravitation und die Raumausdehnung bestimmt wurde. Dafür hat man sich vorzustellen, dass sich die Gravitation auf die massereichen Gebiete verdichtend auswirkt, wohingegen die Separierung der massereichen Gebiete durch die Ausdehnung des Raumes bestimmt wurde. Aus diesem Grund ist eine Konzentration der Masse des Universums in der Distanz des mit der Ausdehnung des Raumes vergrößerten *Sound Horizon* zu erwarten (siehe Abbildung 3.4).

Aus der Länge  $r_s$  für den *Sound Horizon*, der sich dem Standardmodell zufolge aus 3.3.4 ergibt, resultiert demzufolge für den BAO Peak die Länge

$$\frac{1}{a(\hat{t}_r)} r_s = (1 + z_r) r_s = 1101 \cdot 135 \text{ Kpc} \approx 150 \text{ Mpc} . \quad (3.4.1)$$

Die Messung des BAO Peaks wird durch die paarweise Zählung von Galaxien gleicher Distanz vorgenommen (auf die Messungen durch den Ly $\alpha$  Wald werden wir hier nicht eingehen [24]).

Bezeichne dafür  $N_{obs}(s)$  die Anzahl der beobachteten Galaxienpaare mit der Separierung (Distanz)  $s$  und  $N_{ran}(s)$  deren zu erwartende Anzahl bei einer zufälligen Verteilung der Galaxien im Universum, dann kann mithilfe der sogenannten *two-point correlation function*

$$\xi(s) = \frac{N_{obs}(s)}{N_{ran}(s)} - 1 \quad (3.4.2)$$

eine etwaige Häufung von Galaxien mit der Separierung  $s$  detektiert werden. Auf der Datenbasis des im Abschnitt 3.2 vorgestellten SDSS-III Projektes konnten im Jahr 2013 L. Anderson et al. unter Berücksichtigung von nahezu einer Million Galaxien im Bereich der Rotverschiebung  $0.2 < z < 0.7$  für diese Funktion den BAO Peak bei  $149.28 \text{ Mpc}$  bestimmen [22].

Dieser Nachweis des als *First Acoustic Peak* in der Hintergrundstrahlung gemessenen *Sound Horizon* in den Strukturen des heutigen Universums ist einer der wichtigsten Belege für die Evidenz des Standardmodells.

Wie im letzten Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, muss sich bei Evidenz der dichteabhängigen Gravitation die Länge des *Sound Horizon* ungefähr verdoppeln. Da die über die Rotverschiebung beschriebene Skalierung der Längen unabhängig vom betrachteten Expansionsmodell ist, muss sich nach 3.4.1 dementsprechend auch der BAO Peak verdoppeln.

Demzufolge hätte das Ergebnis von L. Anderson nicht die Separierung der Fundamentalfrequenz im Leistungsspektrum der Temperaturschwankungen der Hintergrundstrahlung, sondern die ihrer 1-ten Oberschwingung mit der halben Wellenlänge  $r_s$  gemessen. Allerdings haben wir dabei noch nicht die Abweichungen der Distanzen berücksichtigt, die sich nach Abschnitt 3.2 im Entfernungsbereich der Messungen für den BAO Peak einstellen.

Um diese Abweichungen abzuschätzen, können wir uns auf die Werte für die effektiven Distanz-Relationen  $\delta_1(z)$  in der Tabelle 3.3 beziehen, da sich die zur Messung des BAO Peaks verwendeten Werte für den Parameter  $\Omega_M = 0.274$  und für die Hubble-Konstante  $H_0 = 70.0 \text{ km/sMpc}$  nur wenig von dem zur Abschätzung der  $\delta_1(z)$  verwendeten Wert  $\Omega_M = 0.25$  sowie dem im letzten Kapitel zur dichteabhängigen Gravitation bestimmten Wert für die Hubble-Konstante  $H_0 = 69.8 \text{ km/sMpc}$  (siehe 2.5.6) unterscheiden. Hierfür nutzen wir aus, dass die Rotverschiebungen zweier Galaxien, deren Separation im Bereich des BAO Peaks liegt, wenig voneinander abweichen, so dass nicht nur die abweichende Distanz zum Beobachter, sondern aufgrund des linearen Zusammenhangs auch die Abweichung für die Distanz zwischen ihnen, ihre Separation, in ausreichender Genauigkeit durch  $\delta_1(z)$  zu ihrer (nahezu) gemeinsamen Rotverschiebung  $z$  beschrieben wird. Dabei müsste sich aufgrund der  $z$ -Abhängigkeit der effektiven Distanz-Relationen  $\delta_1(z)$  bei Evidenz der dichteabhängigen Gravitation eine Streuung für die auf dem Standardmodell beruhenden Messungen des BAO Peaks zu den verschiedenen Rotverschiebungen  $0.2 < z < 0.7$  ergeben, die der Tabelle 3.3 zufolge aber kaum mehr als 10% betragen würde.

Ob diese Unschärfe bei der Messung des BAO Peaks einfach nicht genauer untersucht wurde oder ob die Genauigkeit der Messungen nicht ausreicht, um im Rahmen der dabei angewendeten statistischen Methoden zu signifikanten Abweichungen zu führen, oder diese Unschärfe doch eher unvereinbar mit den Messdaten ist, wurde aufgrund der gewaltigen dafür zu analysierenden Datenmenge, die für eine derartige Überprüfung zu berücksichtigen wäre, hier nicht näher untersucht. Wie auch immer, ergibt sich aus dieser von der Rotverschiebung  $z$  abhängigen Unschärfe, die sich für die Distanzen des Standardmodells bei der Bestimmung des BAO Peaks einstellen müsste, ein weiteres Kriterium zur Überprüfung der gravitativen Abhängigkeit bei der Entfernungsbestimmung durch diese Messverfahren.

Um nun die Distanz der Separation für die dichteabhängige Gravitation zu erhalten, gehen wir der Einfachheit halber von einer für  $z$  gleichverteilten Anzahl von beobachteten Galaxien aus, so dass sich diese gemäß 3.4.2 über die effektive Distanz-Relation zur mittleren Rotverschiebung  $\delta_1(0.45)$  ergibt.

Nach 3.4.1 ergibt sich damit für die auf die Hintergrundstrahlung projizierte der durch L. Anderson nachgewiesenen Separierung die Länge

$$\tilde{r}_s = \delta_1(0.45) r_s . \quad (3.4.3)$$

Für deren Winkeldurchmesser folgt dann analog zu 3.3.5 zusammen mit 3.3.7 sowie  $\delta_1(0.45) \approx 0.63$  (siehe Tabelle 3.3)

$$\tilde{\Theta} = \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{d}_A} = \frac{\delta_1(0.45) r_s}{\frac{\tilde{D}(z_r)}{D(z_r)} d_A} = \frac{0.63 r_s}{1.9 d_A} \approx \frac{1}{3} \Theta .$$

In der Abbildung 3.5 ist die Gesamtsituation mit den relevanten Größen für die beiden Expansionsmodelle skizziert.

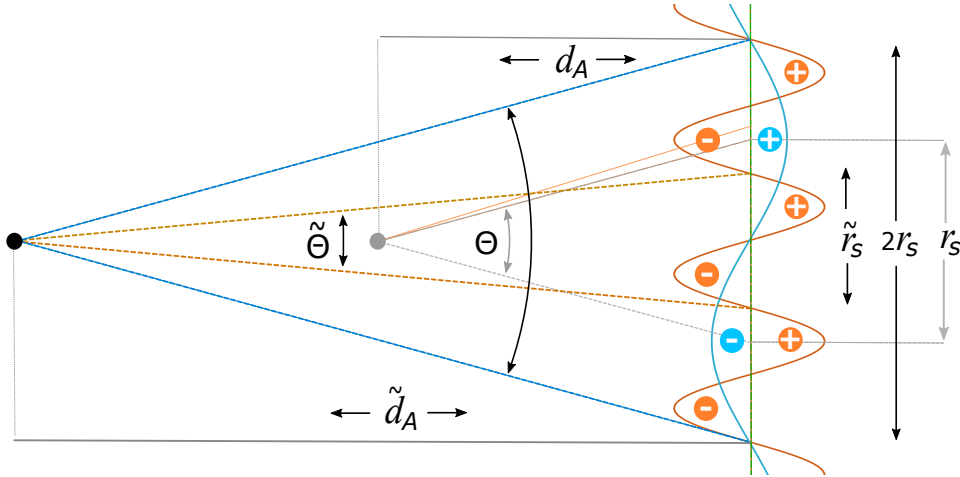


Abbildung 3.5: Der gemessene BAO Peak als 2-te Oberschwingung

Da sich, wie im Abschnitt 3.3 erläutert, bei Evidenz der dichteabhängigen Gravitation die Winkeldurchmesser-Distanz zur Hintergrundstrahlung von  $d_A$  auf  $\tilde{d}_A$  ungefähr verdoppelt, muss sich unter dem aus dem Leistungsspektrum ermittelten Winkeldurchmesser  $\Theta$  auch der *Sound Horizon* von  $r_s$  auf  $2r_s$  verdoppeln.

Unter zusätzlicher Berücksichtigung der abweichenden Distanzbestimmung hätte sich die von L. Anderson gemessene Separierung demzufolge nicht aus der Grundschwingung mit der Wellenlänge  $2r_s$ , sondern aus ihrer 2-ten Oberschwingung gebildet, deren gemittelte Temperaturverteilung mit den dominierenden Anisotropien in der Hintergrundstrahlung korrespondiert:  $3\tilde{r}_s = 3\delta_1(0.45)r_s \approx 3\frac{2}{3}r_s = 2r_s$ .

Die aus der Grundschiwingung resultierende größere Separierung sollte aber deutlich ausgeprägter sein als die ihrer 2-ten Oberschiwingung. Dass diese bisher noch nicht entdeckt worden ist, lässt sich einfach dadurch erklären, dass aufgrund der angenommenen Maximalität der durch L. Anderson nachgewiesenen Separierung nicht nach ihr gesucht wurde. Insbesondere böte der Nachweis dieser Separierungen ein Kriterium sowohl zur Bestätigung der dichteabhängigen Gravitation als auch zur Widerlegung der Annahmen des Standardmodells, das diese Separierung nicht erklären könnte.

Damit haben wir gezeigt, wie sich die im zweiten Kapitel rein formal aus der Grundannahme 2.0.1 entwickelte dichteabhängige Gravitation bzw. die aus ihr resultierende dichteunabhängige Expansionsdynamik mithilfe der im dritten Kapitel formal beschriebenen Abweichungen bei der Bestimmung der Distanzen durch eine Uminterpretation der exemplarisch herangezogenen Messdaten der beschleunigten Expansion und des BAO Peaks in empirische Übereinstimmung bringen lassen. Dabei ließen sich nicht nur die Annahmen zur Abschätzung der abweichenden Distanzen für das ältere Universum, sondern im Zusammenhang mit der Inflationstheorie auch die Probleme des frühen Universums ausnahmslos auf die geringere Gravitationswirkung in der Vergangenheit des Universums zurückführen.

Diese monokausale Erklärung für einige der grundlegenden Probleme in der heutigen Kosmologie muss beeindrucken und sollte genügend Anreiz geben, die in dieser Arbeit vorgestellten, teilweise recht spekulativen Annahmen genauer zu untersuchen.

## Fazit

Schon in der *Allgemeinen Relativitätstheorie* wird die Gravitation durch eine Relation zwischen Raum und Materie erklärt, die auf der Eigenschaft der Materie die Raum-Zeit zu krümmen beruht, wobei die Gravitationskraft, wie bei Newton durch  $G$  beschrieben, als Naturkonstante angesehen wird. Diese Erklärung wird durch die Grundannahme 2.0.1 insofern erweitert, als die Gravitationskraft nun selbst über die Gravitationsfunktion  $\tilde{G}(t)$  auf eine Relation zwischen Raum und Materie zurückgeführt wird.

Das hieraus resultierende Modell erklärt die kosmologische Expansion ohne die spekulativen Annahmen der dunklen Materie und der dunklen Energie sowie der inflationären Phase zu ihrem Beginn. Dabei ergibt sich für diese Expansion nicht nur eine signifikante Übereinstimmung mit dem von W. Freedman gemessenen Wert für die Hubble-Konstante, sondern bietet über die abweichende Entfernungbestimmung auch eine prinzipielle Erklärung für die anderen abweichenden Messungen der Hubble-Konstanten.

Allerdings wurde in dieser Arbeit auf eine genaue empirische Untersuchung der abweichenden Entfernungen für die zahlreichen Beobachtungen, die sich in Übereinstimmung mit dem Standardmodell befinden, verzichtet, da diese den hier gesteckten Rahmen gesprengt hätten. Aus diesem Grund wurden die Konsequenzen aus den abweichenden Entfernungen exemplarisch für die Messungen der beschleunigten Expansion sowie des BAO Peaks entwickelt, wobei die dafür geführte Argumentation im Wesentlichen auf den folgenden Annahmen beruht:

- Die in der Grundannahme 2.0.1 definierte Gravitationsfunktion  $\tilde{G}(t)$  bzw. die durch diese beschriebenen Gravitationsfelder stehen nicht im Widerspruch zu den Feldgleichungen der ART (siehe Bemerkung 2.1).
- Die Leuchtkraft der Supernovae vom Typ Ia besitzt eine Abhängigkeit von der Gravitation, über die sich die Helligkeiten in der Abbildung 3.1 für die dichteabhängige Gravitation erklären lassen (siehe auch 3.2.2).
- Die Verdopplung der Dauer für die *Baryonic Acoustic Oscillation* auf ungefähr 760.000 Jahre lässt sich in Übereinstimmung mit den gemessenen Temperaturschwankungen in der Hintergrundstrahlung durch die dichteabhängige Gravitation erklären.

Dabei lassen sich durch diese Annahmen bestenfalls die Beobachtungen im Rahmen der kosmologischen Expansion allgemein erklären. Die gravitativen Phänomene auf den astronomisch kleinen Entfernungen (wie beispielsweise die zu schnelle Rotationsgeschwindigkeit der Galaxien) ergeben sich nicht unmittelbar aus der dichteabhängigen Gravitation und können auch nicht wie im Standardmodell auf die dunkle Materie zurückgeführt werden.

Auf der anderen Seite verspricht die dichteabhängige Gravitation über eine zukünftige Erklärung für diese lokalen Phänomene ein besseres Verständnis von der Natur der Gravitation zu erhalten, die unter den fundamentalen Kräften der Physik in vielerlei Hinsicht eine Sonderrolle einnimmt.

Für die Gravitation existiert keine Gegenkraft und bisher konnte für sie kein Austauschteilchen nachgewiesen werden. Auf diese Weise widersetzt sich die Gravitation seit Jahrzehnten erfolgreich einer quantenmechanischen Beschreibung, die als Schlüssel zur sogenannten »Weltformel« angesehen wird. Möglicherweise weist uns die Grundannahme 2.0.1 über ihre Erklärung der Gravitation als Scheinkraft eines bisher unerkannten Zusammenhangs zwischen Raum und Materie den Weg zu einem physikalischen Verständnis für eine derart umfängliche Beschreibung der Natur.

Ob sich die lokalen Phänomene der Gravitation, wenn überhaupt, erst über ein radikal verändertes Verständnis von Raum und Materie erklären lassen oder sich bereits durch formale Berücksichtigung von  $\tilde{G}(t)$  in den Einsteinschen Feldgleichungen ergeben, lässt sich an dieser Stelle nicht abschätzen. Auf jeden Fall verspricht die dichteabhängige Gravitation, auch wenn die theoretische Beschreibung ihrer lokalen Konsequenzen zur Zeit noch nicht absehbar ist, einen Erkenntnisgewinn, der im Gegensatz zu den Erklärungen des Standardmodells über die Kosmologie hinausreicht, weshalb die anders gelagerten Spekulationen des Standardmodells, trotz ihrer weitgehenden Übereinstimmung mit den Beobachtungen in Frage gestellt werden sollten. Dabei bietet die dichteabhängige Gravitation über die hier beschriebenen Konsequenzen die folgenden empirischen Kriterien zu ihrer Falsifikation:

- Für  $z > 0.1$  zeigen die gemessenen Distanzen der Supernovae vom Typ Ia nach dem Standardmodell signifikante Abweichungen zu ihren Galaxien (siehe Abschnitt 3.2).
- Die Daten des SDSS-III Projektes besitzen um die Separation des BAO Peaks eine z-abhängige Streuung, die mit den Werten der Tabelle 3.3 für  $\gamma = 1$  erklärt werden kann (siehe Abschnitt 3.4).
- Es muss sich eine größere Separation nachweisen lassen, die ungefähr die 3-fache Distanz des BAO Peaks aufweist. (siehe Abschnitt 3.4).

Möglicherweise sind diese Kriterien auf Grundlage des bereits vorhandenen Datenmaterials bei geeigneter Interpretation durch die Spezialisten für die jeweiligen Messverfahren überprüfbar.

Wegen der weitreichenden Auswirkungen einer in der Vergangenheit des Universums abnehmenden Gravitation sind diese Kriterien aber sicherlich nicht erschöpfend, weshalb sich die dichteabhängige Gravitation durch eine Vielzahl weiterer Beobachtungen bestätigen oder widerlegen lassen können sollte, wenn man diese nur gezielt sucht.

## Danksagung

Jeder wissenschaftliche Fortschritt fußt auf den Erkenntnissen vorheriger Forschung, dennoch sollen hier zwei Ergebnisse wegen ihrer unmittelbaren Bedeutung für diese Arbeit hervorgehoben werden.

Ungefähr sieben Jahre nachdem A. Einstein seine ART der Preußischen Akademie der Wissenschaften vorstellte zeigte A. Friedmann über die heute nach ihm benannten Gleichungen, dass sich in deren Konsequenz unter den vereinfachenden Annahmen des kosmologischen Prinzips die kosmologische Expansion durch die Newtonsche Mechanik beschreiben lässt. Ohne diese fundamentale Einsicht, dessen Bedeutung für die Kosmologie aber zunächst nicht erkannt wurde, weshalb A. Friedmann, der bereits drei Jahre später im Alter von 37 Jahren verstarb, die Anerkennung für seine Arbeit zu Lebzeiten verwehrt blieb, wäre diese Arbeit nicht denkbar.

Für den Beleg der Evidenz des daraus zusammen mit der Grundannahme entwickelten Expansionsmodells fehlte mir aber lange Zeit ein empirisches Indiz, weshalb die Arbeit drohte im Sande zu verlaufen, als ich eher zufällig auf das Ergebnis der Messungen von W. Freedman stieß. Es war der von ihr ermittelte Wert für die Hubble-Konstante mit dem sie eigentlich eine größere Klarheit schaffen wollte und den sie, obwohl ihr das nicht gelang, dennoch im Jahr 2019 veröffentlichte, der mir das entscheidende Puzzleteil lieferte über das sich schließlich alles weitere zusammenfügte.

Die ersten Zweifel an der Konstanz der Gravitation wurden bei mir durch das Buch von Alexander Unzicker *Vom Urknall zum Durchknall* [26] geweckt, in dem er mit umfangreicher Sachkenntnis die Grenzen der heutigen Physik beschreibt und deren allzu leichtfertigen Überschreitungen ebenso leidenschaftlich wie humorvoll aufs Korn nimmt. Es dauerte dann aber noch einige Jahre und bedurfte unzähliger Diskussionen mit meinem guten Freund Ingo Franz, der selbst einen relativistischen Ansatz für die Beschreibung der kosmologischen Expansion verfolgt [27] und mir mit seinem Fachwissen mehr als einmal weiterzuhelfen wusste, bis die dabei vornehmlich in den Biergärten Berlins entwickelten Ideen anfangen konkrete Formen anzunehmen, die sich auch mathematisch formulieren ließen.

Das dafür benötigte »Rüstzeug« habe ich meinen Eltern zu verdanken, die mir mit ihrer Liebe und ihrem Vertrauen den Weg durchs Leben ebneten und mir insbesondere ein von materiellen Zwängen befreites und weit über die übliche Zeit hinausgehendes Studium der Mathematik ermöglichten.

Abschließend muss ich mich bei meiner Frau Sabine bedanken, die mir trotz ihrer berechtigten Einwände hinsichtlich der praktischen Bedeutung meiner Beschäftigung dennoch die benötigte Zeit und Ruhe zur Fertigstellung dieser Arbeit schenkte.



# Anhang

## Einheiten und Werte

Die Werte werden vorwiegend für das Internationale SI-Einheitensystem (französisch *Système international d'unités*) angegeben. Den Berechnungen in dieser Arbeit liegen die folgenden Einheiten und Werte zugrunde:

- Die *Gravitationskonstante*  $G$

$$G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \approx 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

- Die *Lichtgeschwindigkeit*  $c$

$$c = 299792458 \frac{m}{s} \approx 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

- Das *Jahr* ( $j$ ):

$$1 j = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 3.15 \cdot 10^7 s$$

- Das *Lichtjahr* ( $Lj$ )

$$1 Lj = 9.46073 \cdot 10^{15} m \approx 9.5 \cdot 10^{15} m$$

- Das *Parsec* ( $pc$ )

$$1 pc = 3,085677581 \cdot 10^{16} m \approx 3.1 \cdot 10^{16} m$$

$$1 pc = 3,26156 Lj \approx 3.26 Lj$$

- Temperaturen werden in Kelvin ( $K$ ) angegeben.
- Für die Werte der Hubble-Konstanten verwenden wir die Umrechnung

$$x \frac{km}{sMpc} \approx \frac{x}{31} \cdot 10^{-18} \frac{1}{s}$$

## Thermodynamischer Zusammenhang in der 2. FG

Mit dem Ansatz

$$\rho(t) = \rho_{rad}(t) + \rho_{mat}(t) = \frac{C_{rad}}{a(t)^4} + \frac{C_{mat}}{a(t)^3}$$

und dem relativistischen Zusammenhang  $\rho_{rad} = 3p/c^2$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho a^3 c^2 &= \dot{\rho} a^3 c^2 + \rho 3a^2 \dot{a} c^2 \\ &= a^3 c^2 (\dot{\rho}_{rad} + \dot{\rho}_{mat}) + a^2 c^2 3\dot{a} (\rho_{rad} + \rho_{mat}) \\ &= a^3 c^2 \left( -4 \frac{C_{rad}}{a^5} \dot{a} - 3 \frac{C_{mat}}{a^4} \dot{a} \right) + a^2 c^2 3\dot{a} \left( \frac{C_{rad}}{a^4} + \frac{C_{mat}}{a^3} \right) \\ &= -a^2 c^2 \dot{a} \frac{C_{rad}}{a^4} = -a^2 c^2 \dot{a} \rho_{rad} \\ &= -3a^2 \dot{a} p = -p \frac{d}{dt} a^3 . \end{aligned}$$

## Lösung der Differentialgleichung

**Satz 1.** Die homogene Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$Ky\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0$$

besitzt für  $K \neq 0$  die eindeutige Lösung

$$y(x) = \left[ \frac{K+1}{K} (c_1 x + c_2) \right]^{\frac{K}{K+1}} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

*Beweis.* Da die Variable  $x$  nicht in der Differentialgleichung enthalten ist, können wir deren Ordnung auf 1 reduzieren, indem wir die Substitution  $\dot{y} = p$  verwenden. Entsprechend ist  $\ddot{y} = \frac{d}{dx} p = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \dot{p} p$ , so dass wir für die Ausgangsgleichung

$$Kyp\dot{p} + p = 0$$

erhalten. Dabei wurde  $p$  herausgekürzt, wodurch aber keine Lösung verloren geht, da, wie wir sehen werden,  $p = 0$  in der allgemeinen Lösung aufgeht. Aus der reduzierten Differentialgleichung erhalten wir

$$p(y) = c_1 y^{-1/K}, \quad c_1 \in \mathbb{R} .$$

Wegen  $\dot{y} = p$  folgt daraus  $y^{1/K} \dot{y} = c_1$ , so dass wir durch Integration

$$c_1 x + c_2 = \int y^{1/K} \dot{y} dx = \int y^{1/K} dy = \frac{K}{K+1} y^{\frac{K+1}{K}}$$

mit der Integrationskonstanten  $c_2 \in \mathbb{R}$  die Behauptung erhalten.  $\square$

Für den Beweis des Satzes siehe auch [2], Seite 516.

### Beispielrechnung zur Bestimmung von $H_0$ aus $\Theta$

Die Bestimmung der Hubble-Konstanten  $H_0$  aus der Hintergrundstrahlung ist äußerst kompliziert, da die Wahl der geeigneten Dichteparameter für eine bestmögliche Übereinstimmung mit den Beobachtungen von vielen Faktoren abhängt, die hier nicht im Detail betrachtet werden können.

Aus diesem Grund verwenden wir in dieser Beispielrechnung der Einfachheit halber die Dichteparameter des Kapitel 3, wodurch wir unter anderem den Anteil der Strahlung vernachlässigen. Außerdem zeigen wir den Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $H_0$ , indem wir entgegen der Praxis aus dem Wert für die Hubble-Konstante des Standardmodells den sich daraus ergebenden Winkeldurchmesser  $\Theta$  bestimmen.

Für die Rotverschiebung der Hintergrundstrahlung  $z_r = 1100$  ergibt sich durch numerische Berechnung für das Integral zur Distanz  $D(z_r)$  aus 3.1.8

$$I(1100) = \int_0^{z=1100} \left( 0.25 (1 + z')^3 + 0.75 \right)^{-1/2} dz' \approx 3.44 .$$

Verwenden wir für die Hubble-Konstante den Wert des Standardmodells  $H_0 = 68 \text{ km/sMpc} = 2.19 \cdot 10^{-18} \text{ 1/s}$ , dann ist

$$\frac{c}{H_0} = \frac{3.0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.19 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{s}}} = 1.37 \cdot 10^{26} \text{ m} \approx 4.42 \cdot 10^3 \text{ Mpc} .$$

Damit erhalten wir aus der Länge des *Sound Horizon*  $r_s$  (siehe 3.3.4) schließlich den radialen Wert für dessen Winkeldurchmesser

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{r_s}{d_A} = \frac{r_s}{\frac{1}{1+z_r} D(z_r)} = \frac{r_s}{\frac{1}{1+z_r} \frac{c}{H_0} I(z_r)} \\ &= \frac{0.135}{(1101)^{-1} \cdot 4.42 \cdot 10^3 \cdot 3.44} \approx 0.01 , \end{aligned}$$

bzw.  $(180/\pi)\Theta = (180/\pi) \cdot 0.01 \approx 0.6^\circ$ .

## Einzelnachweise

- [1] Torsten Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, 2012.
- [2] I.N. Bronstein: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [3] Wikipedia -*Friedmann-Gleichung*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Gleichung>
- [4] Wikipedia -*Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Friedmann-Lema%C3%A4tre-Robertson-Walker-Metrik>
- [5] Wikipedia -*Kosmologie*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Kosmologie>
- [6] Wikipedia - *Lambda-CDM-Modell*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM-Modell>
- [7] Supernova Cosmology Project:  
[http://www-supernova.lbl.gov/slides\\_new.html](http://www-supernova.lbl.gov/slides_new.html)
- [8] Saul Perlmutter et al., 1998, arXiv:astro-ph/9812133v1:  
*Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift Supernovae*  
<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133.pdf>
- [9] Wikipedia - *Rotverschiebung*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Rotverschiebung>
- [10] Wikipedia - *Milchstraße*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Milchstra%C3%BE>
- [11] Wikipedia - *Weltalter*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Weltalter>
- [12] Wendy L. Freedman et al., 2019, arXiv:astro-ph/1907.05922:  
*The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch*  
<https://arxiv.org/pdf/1907.05922.pdf>
- [13] Wikipedia - *Absolute Helligkeit*:  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Absolute\\_Helligkeit](https://de.wikipedia.org/wiki/Absolute_Helligkeit)
- [14] Wikipedia - *Schallgeschwindigkeit*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit>

- [15] Wikipedia - *Fundamental frequency*:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_frequency](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_frequency)
- [16] Scholarpedia - *Cosmological constraints from baryonic acoustic oscillation measurements*:  
[http://www.scholarpedia.org/article/Cosmological\\_constraints\\_from\\_baryonic\\_acoustic\\_oscillation\\_measurements](http://www.scholarpedia.org/article/Cosmological_constraints_from_baryonic_acoustic_oscillation_measurements)
- [17] Wikipedia - *Hintergrundstrahlung*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Hintergrundstrahlung>
- [18] *The Microwave Background and the Planck Mission*:  
[https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Space\\_Science/Planck/Planck\\_and\\_the\\_cosmic\\_microwave\\_background](https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_and_the_cosmic_microwave_background)
- [19] Scholarpedia - *Tully-Fisher relation*:  
[http://www.scholarpedia.org/article/Tully-Fisher\\_relation](http://www.scholarpedia.org/article/Tully-Fisher_relation)
- [20] Wikipedia - *Virialsatz*:  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Virialsatz>
- [21] *Sloan Digital Sky Survey (SDSS III)*:  
<http://www.sdss3.org/>
- [22] Lauren Anderson et al., 2013, arXiv:astro-ph/1312.4877:  
*The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Baryon Acoustic Oscillations in the DataRelease 10 and 11 Galaxy Samples*  
<https://arxiv.org/pdf/1312.4877.pdf>
- [23] Daniel J. Eisenstein et al., 2005, arXiv:astro-ph/0501171v1:  
*Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*  
<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0501171.pdf>
- [24] Andrei Cuceu, James Farr, Pablo Lemos, Andreu Font-Ribera, 2019, arXiv:astro-ph/1906.11628:  
*Baryon Acoustic Oscillations and the Hubble Constant: Past, Present and Future*  
<https://arxiv.org/pdf/1906.11628.pdf>
- [25] Wikipedia - *Inflationstheorie*:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation\\_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation_(cosmology))
- [26] Alexander Unzicker *Vom Urknall zum Durchknall*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [27] Ingo Franz *Ein rekursives kosmologisches Modell*, Think Loud, 2019.  
<https://moringa.pub/ojs/index.php/thinki/article/view/65>